

文章编号: 0529-6579 (2000) 03-0001-05

一类平面微分方程极限环的计算^{*}

陈树辉, 黄彪, 徐 兆

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 应用摄动-增量法研究一类平面多项式微分方程的极限环相图, 半稳定极限环分叉和极限环个数的计算问题. 该方法的特点是用有限 Fourier 级数给出极限环的近似解析表达式, 把微分方程化为线性增量方程, 应用谐波平衡法建立 Fourier 系数的线性代数方程组, 再用迭代法求解. 二次系统的算例表明该方法是有效的.

关键词: 多项式系统; 极限环; 分叉值; 摄动-增量法

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

平面多项式微分系统极限环的个数及其分布在理论和应用上都是重要而又非常困难的问题. 100 年来国内外学者对此进行了许多研究并取得了一些重要成果; 但对于给定的具体系统如何计算极限环的个数及其分布则缺乏有效的计算方法. 近年来出现了一种新方法, 称为摄动-增量法^[1], 应用于非线性振动系统的极限环, 同(异)宿轨线和半稳定极限环的计算, 取得了很好的效果^[2,3]. 它与常用的数值方法不同的是不但可以计算稳定或不稳定的极限环, 而且可以计算半稳定极限环并给出极限环的表达式. 这种新方法兼有分析法和数值法的优点. 本文将进一步推广应用于下列平面系统

$$\dot{x} = y + \lambda f(x, y, \mu), \quad \dot{y} = -g(x) + \lambda h(x, y, \mu) \quad (1)$$

其中, f, g 和 h 为其变量 x, y 的多项式函数, λ 和 μ 为实参数. 常见的非线性振动方程

$$\ddot{x} + g(x) = \lambda f(x, \dot{x}, \mu)$$

和二次系统
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 \\ \dot{y} = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2 \end{cases}$$

都可以化为方程(1)的形式^[1]. 本文将给出方程(1)极限环的表达式、稳定性和个数的计算方法. 最后给出二次系统极限环的算例.

1 极限环的计算

在方程(1)中假设 $g(0) = f(0, 0, \mu) = h(0, 0, \mu)$ 并满足文[4] 存在极限环的条件. 因此, 极限环包围原点. 作非线性时间变换

^{*} 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19772075); 中山大学高等学术中心基金资助项目

收稿日期: 1999-06-04; 作者简介: 陈树辉 (1944~), 男, 教授, 博士生导师.

$$\varphi = \Phi(\varphi), \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad (2)$$

其中, φ 是新时间, 在 φ 域内把极限环表示为

$$x = a \cos \varphi + b, y = C_0 + \sum_{k \geq 1} (C_k \cos k\varphi + D_k \sin k\varphi) \quad (3)$$

这里 a 是振幅, b 是偏心. 方程(1)可改写为

$$y + a\Phi \sin \varphi + \lambda f(x, y, \mu) = 0 \quad (4)$$

$$(\Phi \sin \varphi)^2 / 2 - [V(a+b) - V(a \cos \varphi + b)] / a^2 + \lambda \Phi f \sin \varphi / a - \frac{\lambda}{a} \int_0^\varphi [f d(\Phi \sin \varphi) / d\varphi - h \sin \varphi] d\varphi = 0 \quad (5)$$

式中, $V(x) = \int_0^x g(u) du$. 在方程(5)中分别令 $\varphi = \pi$ 和 2π 得

$$V(a+b) - V(-a+b) + \lambda a \int_0^\pi [f d(\Phi \sin \varphi) / d\varphi - h \sin \varphi] d\varphi = 0 \quad (6)$$

$$\int_0^{2\pi} [f d(\Phi \sin \varphi) / d\varphi - h \sin \varphi] d\varphi = 0 \quad (7)$$

为了判定极限环的稳定性, 可计算特征指数

$$\gamma = \frac{\lambda}{T} \int_0^{2\pi} R(a, b, \mu, \Phi, \varphi) d\varphi \quad (8)$$

其中, $R(a, b, \mu, \Phi, \varphi) = (\partial f / \partial x + \partial h / \partial y) / \Phi$, $T = \int_0^{2\pi} [1 / \Phi(\varphi)] d\varphi$. 若 $\gamma < 0$ ($\gamma > 0$), 则极限环是稳定(不稳定)的, 对于半稳定极限环, 必须满足条件 $\gamma = 0$.

极限环的计算分 2 步进行. 第 1 步假设 $\lambda = \lambda_0 \approx 0$. 由式(3), (4), 极限环的近似解为

$$x_0 = a_0 \cos \varphi + b_0, y_0 = -a_0 \Phi_0 \sin \varphi \quad (9)$$

此时, 式(5)、(6)和(7)可分别近似为

$$\Phi_0 = \left\{ [2V(a_0 + b_0) - 2V(a_0 \cos \varphi + b_0)] / a_0^2 \sin \varphi \right\}^{1/2} \quad (10)$$

$$V(a_0 + b_0) - V(-a_0 + b_0) = 0 \quad (11)$$

$$\int_0^{2\pi} [f(x_0, y_0, \mu) d(\Phi_0 \sin \varphi) / d\varphi - h(x_0, y_0, \mu) \sin \varphi] d\varphi = 0 \quad (12)$$

联立式(10)、(11)和(12), 可确定式(9)中的 a_0 , b_0 和 Φ_0 .

第 2 步假设 λ 不是小参数, 则可用增量法求解. 现给 λ 一个小增量 $\Delta\lambda$, 那么相应地有 Δa , Δb 和 $\Delta\Phi$. 令 $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, $a = a_0 + \Delta a$, $b = b_0 + \Delta b$, $y = y_0 + \Delta y$, $\Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi$, 代入方程(4)~(7), 略去高阶项后便得相应的增量方程.

由于 Φ 和 y 均为 φ 的 2π 周期函数, 故可展开为 Fourier 级数

$$\Phi(\varphi) \approx P_0 + \sum_{k=1}^M (P_k \cos k\varphi + Q_k \sin k\varphi), y(\varphi) \approx C_0 + \sum_{k=1}^M (C_k \cos k\varphi + D_k \sin k\varphi)$$

只要 M 充分大, 上式就有足够的精度. 同样, $\Delta\Phi$ 和 Δy 可展开为

$$\Delta\Phi(\varphi) \approx \Delta P_0 + \sum_{k=1}^M (\Delta P_k \cos k\varphi + \Delta Q_k \sin k\varphi),$$

$$\Delta y(\varphi) \approx \Delta C_0 + \sum_{k=1}^M (\Delta C_k \cos k\varphi + \Delta D_k \sin k\varphi)$$

把增量方程中的周期函数都展为 Fourier 级数, 并应用谐波平衡法可得以 Δa , Δb , ΔC_k , ΔD_k , ΔP_k 和 ΔQ_k 为未知量的线性代数方程组

$$A_n \Delta a + B_n \Delta b + C_{n,0} \Delta C_0 + \sum_{k=1}^M (C_{n,k} \Delta C_k + D_{n,k} \Delta D_k) + P_{n,0} \Delta P_0 + \sum_{k=1}^M (P_{n,k} \Delta P_k + Q_{n,k} \Delta Q_k) = R_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 4M+4) \quad (13)$$

方程组(13)中方程个数与未知量个数相等. 解出 $\Delta a, \Delta b, \Delta C_k, \Delta D_k, \Delta P_k$ 和 ΔQ_k 后, 用 $a = a_0 + \Delta a, b = b_0 + \Delta b, \Phi = \Phi_0 + \Delta \Phi$ 和 $y = y_0 + \Delta y$ 作为新的 a_0, b_0, Φ_0 和 y_0 , 从头再算. 当 R_n 小于预先规定的误差时(本文的算例误差为 10^{-5}), 迭代结束, 这就是通常采用的迭代法. 此时得到对应于 λ 的解 a, b, Φ 和 y , 再以此值作为新的初值 λ_0 , 又给出参数以增量 $\Delta \lambda, \lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$, 重复上述迭代过程, 经 N 次增量后, 当 N 足够大时, 就得到相当大参数对应的解. 这是求解稳定或不稳定极限环的一般方法. 如果要计算半稳定极限环, 则必须补充条件 $\gamma = 0$. 此时方程个数比未知量个数多 1, 为此应补充一个未知量, 可以选 μ 作为新的未知量, 具体计算过程可参阅文[3].

2 极限环个数与分叉

为研究在给定参数范围内极限环的个数, 需计算极限环振幅与参数的关系曲线. 由给定参数值与曲线的交点个数可确定极限环个数, 在局部极大极小值处, 极限环个数出现分叉.

现给定 $a = a_0$, 当 $\lambda = \lambda_0 \approx 0$ 时, 由方程(9)~(12)计算出 μ_0, b_0, y_0 和 Φ_0 ; 然后令 $\lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$, 则相应地有 $\mu = \mu_0 + \Delta \mu, b = b_0 + \Delta b, y = y_0 + \Delta y, \Phi = \Phi_0 + \Delta \Phi$, 按上节同样的方法, 可以得到线性代数方程组

$$C_n \Delta \mu + B_n \Delta b + C_{n,0} \Delta C + \sum_{k=1}^M (C_{n,k} \Delta C_k + D_{n,k} \Delta D_k) + P_{n,0} \Delta P_0 + \sum_{k=1}^M (P_{n,k} \Delta P_k + Q_{n,k} \Delta Q_k) = R_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 4M+4) \quad (14)$$

比较(13)、(14)可知, 原 Δa 现换为 $\Delta \mu$, 即给定 a 求 μ, b, y 和 Φ , 按上节方法经 N 次增量后, λ 将达到我们所需的值 λ , 然后固定 $\lambda = \lambda$, 而变动 $a = a_0 + k \Delta a$, 于是得到对应的 μ_k, b_k, y_k 和 Φ_k . 选取 $a_k = a_0 + k \Delta a$ 和 μ_k , 作曲线 $\mu = \mu(a)$. 这就得到 $\lambda = \lambda$ 时所要求的极限环振幅—参数曲线.

3 算例

作为本方法的应用, 研究下列二次系统

$$x = y + \lambda(-xy + \frac{2}{3}y^2), y = -x - x^2 + \lambda[\mu y + (1 + \delta)xy - y^2] \quad (15)$$

当 $\lambda = 1, -1.065 < \delta < 0$ 时, 用坐标的线性变换可化为文[5]证明有 2 个极限环的例子. 本例 $f = -xy + 2/3y^2, h = \mu y + (1 + \delta)xy - y^2, g = x + x^2, V(x) = x^2/2 + x^3/3$. 取 $\delta = -0.5$, 当 $\lambda \approx 0$ 时由方程(10)~(12)得

$$b_0 = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{4}{3}a_0^2} \right], \quad \Phi_0(\varphi) = \left[1 + 2b_0 + \frac{2}{3}a_0 \cos \varphi \right]^{1/2} \quad (16)$$

$$\mu = -0.5 \int_0^{2\pi} (a_0 \cos \varphi + b_0) \Phi_0 \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \Phi_0 \sin^2 \varphi d\varphi$$

先计算极限环的振幅函数, 令 $a_0 = 0.01$, 由(16)式得 $b_0 = -3.3 \times 10^{-5}, \mu_0 = -1.2 \times$

10^{-5} 以此作为初值并取 $\Delta\lambda = 0.5$, $M = 4$ 代入方程组 (14). 当迭代到达精度后, 再对 λ 给予增量 $\Delta\lambda$, 继续同样的迭代过程, 结果得到 $\lambda = 1$, $a_0 = 0.01$ 对应的 b , y 和 Φ . 现在固定 $\lambda = 1$, 变动 a_0 为 $a_k = 0.01 + 0.01 \times k$, $k = 1, 2, \dots$ 不断进行上述迭代过程, 就得到一串 $\mu(a_k)$, 同时计算极限环稳定性的特征指数 $\gamma(a_k)$, 由此作出 $\lambda = 1$ 的振幅曲线和特征指数曲线 (图 1).

当 $a = a^* \approx 0.398$ 时, μ 曲线有一个极小值 $\mu = \mu^* \approx -0.01586$, $\gamma(a^*) = 0$. 当 $a < a^*$ 时, $\gamma > 0$; 而当 $a > a^*$ 时 $\gamma < 0$. 因此, 当 μ 稍大于 μ^* 时有 2 个极限环, 小环不稳定, 而大环稳定. 当 $\mu = \mu^*$ 时出现半稳定极限环. 令 $\mu = -0.015$ 和 $\mu = \mu^*$, 求得极限环 (图 2). 图中还给出稳定极限环用四阶 Runge-Kutta 方法求得的数值解, 2 种方法结果吻合, 说明本方法是有效的.

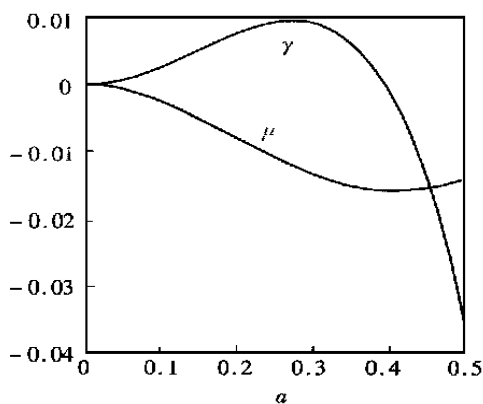


图 1 方程 (15) $\lambda = 1$ 和 $\delta = -0.5$ 时参数和特征指数 γ 随极限环振幅 a 的变化

Fig 1 The parameter μ and the characteristic exponent γ versus amplitude a of the limit cycle of equation (15) for $\lambda = 1$ and $\delta = -0.5$

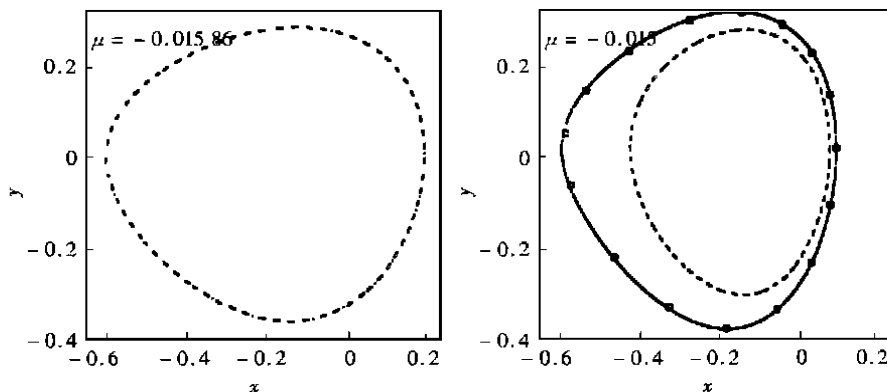


图 2 方程 (15) $\lambda = 1$ 和 $\delta = -0.5$ 时对应于 $\mu = -0.015$ 和 $\mu = \mu^* \approx -0.01586$ 的极限环相图
—— 稳定极限环; --- 不稳定极限环; - · - · - 半稳定极限环; ° 数值积分法

Fig 2 Limit cycles phase portraits of equation (15) with $\lambda = 1$ and $\delta = -0.5$ for $\mu = -0.015$ and $\mu = \mu^* \approx -0.01586$

参考文献:

- [1] CHAN H S Y, CHUNG K W, XU Z. A perturbation-incremental method for strongly non-linear oscillators[J]. Int J Non-linear Mechanics, 1996, 31(1): 59~72.
- [2] XU Z, CHAN H S Y, CHUNG K W. Separatrices and limit cycles of strongly non-linear oscillators by the perturbation-incremental method[J]. Nonlinear Dynamics, 1996, 11(3): 213~233.
- [3] 陈树辉, 黄武林, 徐兆. Liénard 方程半稳定极限环的计算[J]. 中山大学学报 (自然科学版), 1998, 37(6): 5~9.

- [4] 徐兆, 杨宗炼. 一类拟哈密顿系统的极限环[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1998, 37(4): 9 ~ 16.
- [5] ROUSSEAU C. Example of a quadratic system with two cycles appearing in a homoclinic loop bifurcation[J]. J Differential Equations 1987, 66(1): 140 ~ 150

Calculation of Limit Cycles for Certain Planar Differential Equations

CHEN Shu-hui^{*}, HUANG Cheng-biao, XU Zhao

Abstract: The limit cycle phase portraits, the semi-stable limit cycle bifurcation and the number of limit cycles for certain planar polynomial differential equations are studied by using the perturbation-incremental method. The essence of this method is to construct an approximate analytical expression in terms of Fourier series for the limit cycle. Firstly, the governing differential equations are transformed into linearized incremental equations. Then a set of linearized algebraic equations in terms of Fourier coefficients is set up. Finally, the linear equations are solved iteratively. A quadratic system is taken as an example to show the efficiency and the accuracy of the present method.

Keywords: polynomial system; limit cycle; bifurcation; perturbation-incremental method

·简 讯·

中山大学学报被引频次和影响因子连续三年 进入中国科技期刊综合类前 10 名

根据中国科学院文献情报中心中国科学引文数据库从 1997 年开始公布的中国科技期刊“被引频次”和“影响因子”的排行表,《中山大学学报(自然科学版)》的“被引频次”和“影响因子”已连续三年位于中国科技期刊综合类的前 10 名内.连续三年该两项指标均进入中国科技期刊综合类前 10 名的还有《中国科学·A》,《南京大学学报(自然科学版)》.

“被引频次”、“影响因子”是评价科技期刊学术质量的重要指标.近几年来,中山大学学报(自然科学版)深化改革,发挥本校优势,热心为科研、教学服务,采取有效措施,精心组稿,吸引了校内一大批高水平、高质量的好稿件,办出了中山大学学报的特色.

(本刊通讯员)