

文章编号: 0529-6579 (2000) 04-0035-04

# 浅海硬障碍物声波的反散射问题<sup>\*</sup>

张伯坚

(广东 农工商管理学院电子与信息工程系, 广东 广州 510507)

**摘 要:** 研究三维浅海硬障碍物声波的反散射问题, 其中假设浅海海面是自由释放边界, 海底是绝对硬的, 障碍物边界也是绝对硬的. 这一反散射问题归结为外 Neumann 边界值问题, 进而转化为一个边界积分方程. 通过对反散射唯一性问题的研究, 给出了唯一性定理的证明.

**关键词:** 反散射; 硬障碍物; 外向辐射条件; 亥姆霍兹方程

**中图分类号:** O175.2 **文献标识码:** A

## 1 问题的引出

设  $R_d^3 = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x_3 \leq d\}$ , 其中  $\Omega$  是漂浮在浅海  $R_d^3$  中的硬障碍物 ( $\forall \mathbf{x}: = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, 0 < x_3 < d$ ).

对声源在点  $\mathbf{x}_0: = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ , 散射问题则可归结为求总体场  $u: = u^i + u^s$ , 使得:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), & \mathbf{x} \in R_d^3 \setminus \Omega \end{cases} \quad (1)$$

$$u = 0, \quad x_3 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \quad x_3 = d \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[ \frac{\partial \psi_n}{\partial r} - ika_n \psi_n \right] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

这里  $u^i$  是入射波,  $u^s$  是散射波,  $k \neq \frac{(2n+1)\pi}{2d}, n = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} u^s = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(x^*) \varphi_n(x_3), \quad x^* = (x_1, x_2) \\ \varphi_n(x_3) = \sin[k(1 - a_n^2)^{1/2} x_3], \\ a_n = [1 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4k^2 d^2}]^{1/2} \end{cases} \quad (6)$$

<sup>\*</sup> 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (990228)

收稿日期: 2000-04-03; 作者简介: 张伯坚 (1964 ~), 男, 博士.

条件 (5) 称为外向辐射条件.

散射波  $u^s$  满足如下方程:

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0, & \mathbf{x} \in R_d^3 \setminus \Omega \end{cases} \quad (1')$$

$$\begin{cases} u^s = 0, & x_3 = 0 \end{cases} \quad (2')$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u^s}{\partial x_3} = 0, & x_3 = d \end{cases} \quad (3')$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u^s}{\partial \nu} = -\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \nu}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4')$$

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[ \frac{\partial \psi_n}{\partial r} - ika_n \psi_n \right] = 0, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5')$$

其中,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  是对应于 (1) ~ (3) 的 Green 函数, Helmholtz 方程 (1) ~ (3) 的 Green 函数可以表示为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\exp(ik\sqrt{|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}^*|^2+|x_3-y_3|^2})}{4\pi\sqrt{|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}^*|^2+|x_3-y_3|^2}} + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (7)$$

其中,

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left\{ \frac{\exp(ik\sqrt{|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}^*|^2+|x_3-y_3-2nd|^2})}{\sqrt{|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}^*|^2+|x_3-y_3-2nd|^2}} - \frac{\exp(ik\sqrt{|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}^*|^2+|x_3+y_3-2nd|^2})}{\sqrt{|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}^*|^2+|x_3+y_3-2nd|^2}} \right\} - \frac{\exp(ik\sqrt{|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}^*|^2+|x_3+y_3|^2})}{4\pi\sqrt{|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}^*|^2+|x_3+y_3|^2}} \quad (8)$$

这里,  $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ ,  $\mathbf{y}^* = (y_1, y_2)$ ,  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  在  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  处是连续的.

下面我们考虑反散射问题: 给出  $u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  ( $\forall \mathbf{x} \in A$ ,  $\forall \mathbf{x}_0 \in B$ ), 确定  $\partial\Omega$ . 这里我们假定平面  $A$  与  $B$  严格在  $\Omega$  上, 在以下的证明及计算中, 若不另说明, 平面  $A, B$  都是指具有上述性质的平面, 即:

$$\begin{cases} a = \sup\{x_3; \mathbf{x} \in A\} < \inf\{x_3; \mathbf{x} \in \Omega\}, \\ b = \sup\{x_3; \mathbf{x} \in B\} < \inf\{x_3; \mathbf{x} \in \Omega\}. \end{cases} \quad (9)$$

对应于这个反散射问题的背景是: 在平面  $B$  给出声源, 在平面  $A$  通过声纳装置接收散射波, 由此确定不明物体  $\Omega$  的形状.

注记: 如果  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , 因  $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$  存在且连续 (这里  $\nu$  是  $\partial\Omega$  的单位外法向量) 注意到:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\exp(ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (10)$$

则文献[1]定理 3.1 中相应的 (3.1) ~ (3.4) 仍成立.  $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$  时, 由 Lax 定理, 文献[1]中相应的 (3.19) ~ (3.23) 也成立.

## 2 唯一性定理

定理 1 如果  $\Omega$  具有  $C^2$  边界,  $R_d^3 \setminus \Omega$  是单连通的,  $\Omega$  严格在平面  $B$  的下面 (即  $\forall \mathbf{x} =$

$(x_1, x_2, x_3) \in \Omega, x_3 > b$ ,  $k^2$  不是负 Laplace 算子关于  $\Omega$  内 Dirichlet 问题的特征值,  $G(\cdot, \mathbf{x}_0)$  是对应 (1) ~ (3) 的 Green 函数, 则:  $H := \{G(\cdot, \mathbf{x}_0); \mathbf{x}_0 \in B\}$ , 在  $L^2(\partial\Omega)$  中是完全的.

定理 2 如果  $\Omega$  满足定理 1 条件,  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$  且在  $\Omega$  内满足 Helmholtz 方程, 则存在一序列  $u_n \in H := \text{span}\{G(\cdot, \mathbf{x}_0); \mathbf{x}_0 \in B\}$ , 使得在  $\Omega$  上的任一子集  $\Omega'$  上,  $u_n$  收敛  $u$ , 而且以下收敛是一致收敛.

$$u_n \rightrightarrows u, \quad \nabla u_n \rightrightarrows \nabla u \quad (\text{在 } \Omega' \text{ 上 } n \rightarrow \infty)$$

定理 3 假设硬障碍物  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  分别具有  $C^2$  边界  $\partial\Omega_1$  和  $\partial\Omega_2$ , 令  $\Omega_* = R_d^3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ . 如果对任意  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_*$ , 分别对应于  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  的 (1') ~ (5') 解在平面  $A$  上完全重合, 则  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

定理 4 如果  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  分别是具有  $C^2$  边界  $\partial\Omega_1$  和  $\partial\Omega_2$  的硬障碍物, 且它们分别使对应于  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  (1') ~ (5') 的解 (对任意的  $\mathbf{x}_0 \in B$ ) 在平面  $A$  上完全重合, 则  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

证明 由定理 3, 我们需证  $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_* = R_d^3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ , 对应于  $\Omega_1, \Omega_2$  使 (1') ~ (5') 的解在  $A$  上完全重合.

事实上, 对  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_*$ , 我们考虑以下 2 个散射波所对应的外 Neumann 边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u_j^s + k^2 u_j^s = 0, \mathbf{x} \in R_d^3 \setminus \Omega_j & (j = 1, 2) \end{cases} \quad (11)$$

$$u_j^s = 0, \quad x_3 = 0 \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j^s}{\partial x_3} = 0, & x_3 = d \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_j^s}{\partial \nu} = -\frac{\partial G}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \mathbf{x} \in \partial\Omega_j, \quad (j = 1, 2) \quad (14)$$

$$\begin{cases} \text{外向辐射条件 } \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[ \frac{\partial \psi_j}{\partial r} - ika_n \psi_j \right] = 0, & (j = 1, 2) \end{cases} \quad (15)$$

我们选择具有  $C^2$  边界的有界区域  $\Omega_0$ , 使  $R_d^3 \setminus \Omega_0$  是单连通的,  $\Omega_0$  与平面  $B$  不相交, 有

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega_0, \mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega_0} \quad (16)$$

且  $k^2$  不是负 Laplace 算子关于  $\Omega_0$  内 Dirichlet 问题的特征值, 借定理 2 存在序列:

$$\{g_n\} \subset H := \text{span}\{G(\cdot, \mathbf{x}_\eta); \mathbf{x}_\eta \in B\} \text{ 使得}$$

$$g_n(\mathbf{x}) \rightrightarrows G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \quad \nabla g_n(\mathbf{x}) \rightrightarrows \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (17)$$

注意到  $g_n$  是入射源在平面  $B$  的点源波的线性组合而成, 不妨设其对应于  $\Omega_1$  及  $\Omega_2$  的散射波为  $g_{n,1}^s, g_{n,2}^s$ , 故  $g_{n,j}^s (j = 1, 2)$  仍然满足 Helmholtz 方程及外向辐射条件. 由定理假设,  $\forall \mathbf{x}_0 \in B$  问题 (1') ~ (5') 的解在平面  $A$  上完全重合, 类似定理 1 中证明, 可以推证:

$$g_{n,1}^s(\mathbf{x}) = g_{n,2}^s(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_* \quad (18)$$

故可取

$$g_n^s(\mathbf{x}) = g_{n,1}^s(\mathbf{x}) = g_{n,2}^s(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_* \quad (19)$$

立即可有

$$\frac{\partial g_n^s}{\partial \nu} + \frac{\partial g_n}{\partial \nu} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \cap \partial\Omega_* \quad (20)$$

由 (14)、(17) 式有:

$$\frac{\partial g_n^s(\mathbf{x})}{\partial \nu} \rightrightarrows \frac{\partial u_j^s(\mathbf{x})}{\partial \nu}, \quad (j = 1, 2), \mathbf{x} \in (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \cap \partial\Omega_* \quad (21)$$

由 Neumann 外问题解对边界值的连续依赖性, 故

对  $\Omega_*$  内任一紧子集  $E$

$$g_n^s(x) \Rightarrow u_j^s(x), x \in E, n \rightarrow \infty, j = 1, 2 \quad (22)$$

由定理 3 证明  $\text{grad} g_n^s$  关于最大模一致有界及 (12), 对任意  $x \in \Omega_*$  有:

$$u_1^s(x) \equiv u_2^s(x), x \in \Omega_* \quad (23)$$

特别地:

$$\forall x_0 \in \Omega_*, u_1^s(x) = u_2^s(x), \forall x \in A \quad (24)$$

因而利用定理 3 的结果, 定理 4 得证.

参考文献:

- [ 1 ] COLTON D, KRESS R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory [ M ]. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1992.
- [ 2 ] GILBERT R P, YONG Z X. The seamount problem [ A ]. In: ANGELL T S, PAMELA COOK L, et al. Non-linear problems in applied mathematics [ C ]. Philadelphia, SIAM, 1996. 140~149.
- [ 3 ] GILBERT R P, LIN W. Wavelet solutions for time harmonic acoustic waves in a finite ocean [ J ]. Comput Acoust, 1993, 1 (1): 31~60.

## The Inverse Acoustic Scattering Problem of Sound-hard Obstacle in Three Dimensional Shallow Ocean

Zhang Bo-jian<sup>\*</sup>

**Abstract:** The inverse acoustic scattering of sound-hard obstacle in three dimensional shallow ocean with free surface and rigid bottom is studied. This inverse acoustic scattering problem can be reduced to the boundary integral equation. The theorem of uniqueness of inverse acoustic scattering is proved.

**Keywords:** inverse acoustic scattering; sound-hard obstacle; out-going radiation condition; Helmholtz equation

---

<sup>\*</sup> Department of Electronics and Information Engineering, Guangdong AIB Management College, Guangzhou 510507, China