

文章编号: 0529-6579 (2000) 02-0001-05

基于小波分形的图像压缩方法^{*}

范 筑 军

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 给出了一种基于小波分形的图像有损压缩方法. 首先, 利用小波变换将图像分解为不同频率的分量, 然后采用分形迭代函数系统、Huffman 树等方法对它们进行编码. 实验表明, 该算法在保证还原图像质量的情况下, 有较高的压缩比.

关键词: 小波变换; 迭代函数系统; Huffman 树

中图分类号: O174.2; TP391.41 **文献标识码:** A

在以视觉感知特性为指导的图像数据压缩新方法中, 基于小波分析的压缩方法, 具有很好的时频局部化特性, 变换后能量高度集中, 并且已有成熟的数学工具, 便于快速运算, 同时有利于图像的分层传输. 基于分形的方法由于采用迭代函数系统进行压缩, 编码的过程计算复杂度过高, 但对于自相似系统具有很高的压缩比.

本文首先给出了小波选取和图像的小波分解方式, 给出了具有更佳频率的小波分解策略, 然后介绍了分形迭代函数系统与分形压缩的一般方法, 进而给出了算法的总体框架与变换后图像的编码方法, 最后还给出了实验结果.

1 多分辨率分析与小波变换

1.1 多分辨率分析 (MRV)

定义 1 空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一列闭子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 称为 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个多分辨率分析, 如果下面条件满足: (1) 单调性: $V_j \subset V_{j+1}$, 对任意 $j \in \mathbf{Z}$; (2) 逼近性: $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$, $\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$; (3) 伸缩性: $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$; (4) 平移不变性: $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$, 对任意 $k \in \mathbf{Z}$; (5) Riesz 基: 存在 $g \in V_0$, 使得 $\{g(x-k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$ 构成 V_0 的 Riesz 基.

对条件 (5), 可以通过正交化的方法, 找到 $\varphi(x) \in V_0$, 使得 $\{\varphi(x-k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$ 构成空间 V_0 的正交基, 并称 $\varphi(x)$ 为尺度函数. 由条件 (4) 和 (5) 知, $\{\varphi_{j,k}(x) \mid k \in \mathbf{Z}\}$ 构成闭子空间 V_j 的规范正交基, 其中 $\varphi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k)$ ($j, k \in \mathbf{Z}$).

由条件 (1) 与 (5) 可知, 存在 $\{h_k \mid k \in \mathbf{Z}\} \in l^2(\mathbf{Z})$, 使得 φ 满足双尺度差分方程:

^{*} 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19771089)

收稿日期: 1999-07-05 作者简介: 范筑军 (1972~), 男, 博士.

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k)$$

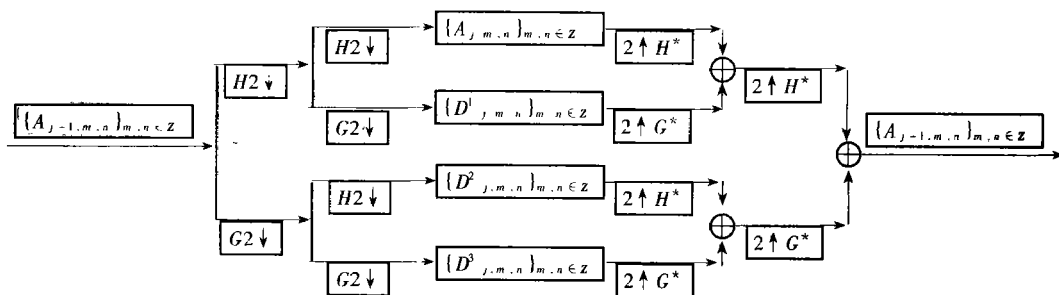
若令 $\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k)$, 其中, $g_k = (-1)^k h_{1-k}$, 则 $\Psi(x)$ 称为小波函数, 且

$$\{\Psi_{m,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \Psi(2^{-m}x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$
 张成的空间 W_m , 满足 $V_m \oplus W_m = V_{m+1}, m \in \mathbb{Z}$.

1.2 小波的分解与重构

设 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是一维多分辨率分析, W_j 是 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补, φ 是尺度函数, Ψ 是小波函数. 令 $A_j = V_j \otimes V_j$, 则 $A_{j-1} = A_j \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j)$. 可以验证 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 构成一个二维多分辨率分析, 尺度函数 $\Phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$; 有 3 个小波函数: $\Psi^1 = \varphi(x)\psi(y)$, $\Psi^2 = \psi(x)\varphi(y)$, $\Psi^3 = \psi(x)\psi(y)$.

给出平方和的二维离散图像信号系列 $\{S_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$, 令 $A_{0,m,n} = S_{m,n}, m, n \in \mathbb{Z}$. 则二维图像的小波分解与重构的递推公式如下所示.



其中, H 和 G 分别是脉冲响应为 $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 的滤波器, H^* 和 G^* 分别是 H 和 G 的对偶算子(在 l^2 中). $2\downarrow$ 表示做 2 点取 1 点的抽样, $2\uparrow$ 表示隔点插入 0 的运算, 滤波就是脉冲响应序列做卷积运算: $(s * g)_n = \sum s(k)g_{n-k}$.

1.3 小波基的选取

在基于小波分析的图像压缩与复现技术中, 小波的选取对压缩效果有很大的影响, 研究表明, 理想的小波应该具有下列性质: (1) 线性相位特性; 以减少或消除复现图像在边缘处的失真; (2) 紧支集特性; 支集越短小波变换的计算复杂度越低, 便于快速实现; (3) 消失矩特性: 即 $\int x^n \Psi(x) dx = 0, n = 1, 2, \dots, k-1$. 一般来说, k 越大, 小波变换后能量越集中于 W_0 , 在 W_0, W_{10}, W_{11} 中会出现更多的 0, 便于提高压缩比. 根据当前研究得知, 有紧支集的正交小波基除 Haar 系以外并不具备线性相位. 为了保持线性相位特性, 可以放弃正交性而采用具有紧支集的双正交小波.

2 分形迭代函数系统

2.1 分形

一般地, 称集合 F 是分形^[1], 如果它具有如下性质: (1) F 具有精细结构, 即任意小比例的细节; (2) F 是如此不规则以至它的整体和局部都不能用传统的几何语言来描述; (3) F 通常具有某种自相似的形式, 可能是近似的或是统计的; (4) 一般而言, F 的“分形维数”大于它的拓扑维数; (5) F 可以简单的方法定义, 可能是由迭代产生.

其中, 自相似性是分形的最显著的特点, 即无论几何尺度怎样变化, 景物任何一小部

分的形状都与较大部分的形状相似.

2.2 分形压缩原理

定理 1 (拼贴定理 Collage theorem)^[2] 设 $S_1, S_2, \dots, S_m$ 为 $\mathbf{R}^n$ 压缩映射, 并假设对所有 $x, y \in \mathbf{R}^n$ 和所有的 i , $|S_i(x) - S_i(y)| \leq c|x - y|$, 其中, $0 < c < 1$, $E \subset \mathbf{R}^n$ 是任意的非空子集, 则 $d(E, F) \leq d(E, \bigcup S_i(E))/(1 - c)$. 其中, F 是 S_i 的不变集, d 是 Hausdorff 距离. (注: 实际上可以取 $c = \max\{c_i, 1 \leq i \leq m\}$.)

推论 1^[2] 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, 给定 $\delta > 0$, 则存在以 F 为不变集的压缩映射 $S_1, S_2, \dots, S_m$, 使 $d(E, F) < \delta$.

推论 1 表明 $\mathbf{R}^n$ 的任意紧子集都可以由自相似集近似到任意的精确度.

设 F 表示图像空间, 图像 $f \in F$ 上一点用三维坐标表示 (x, y, z) , (x, y) 表示像素空间坐标, $z = f(x, y)$ 表示该像素的灰度值. 则分形块编码的思路为^[3]: 把初始图像 $f_0 \in F$ 在 xy 平面分解成互不重叠的 n 个子图像块 $\{R_i, 1 \leq i \leq n\}$, 称为区块. 对每一区块 R_i , 在 xy 平面寻找一个面积比 R_i 大若干倍的图像块 D_i , 称为域块, 在 R_i 和 D_i 中确定一压缩映射 $S_i: f \cap R_i \times I \rightarrow f \cap D_i \times I$ ($1 \leq i \leq n$), 使得 $f \cap R_i$ 和 $S_i(f)$ 的距离最小, 其中 S_i 的压缩因子为 c_i , 记 $S(f) = \bigcup S_i(f)$, S 的压缩因子 $c = \max\{c_i, 1 \leq i \leq n\}$. 分形块编码的可行性由以下定理 2 保证.

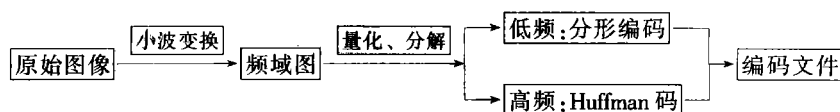
定理 2 设图像 $f \in F$, S 为如上定义的压缩映射, 则对任意初始图像 f_0 , 有: $d(f, S^n(f_0)) \leq d(f, S(f))/(1 - c) + c^n d(f, f_0)$.

由于 $0 < c < 1$, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $c^n d(f, f_0) \rightarrow 0$. 只要原始图像 f 与变换后的 $S(f)$ 的差异充分小, 则 n 充分大时, f 与 $S(f_0)$ 之间的差异也充分小.

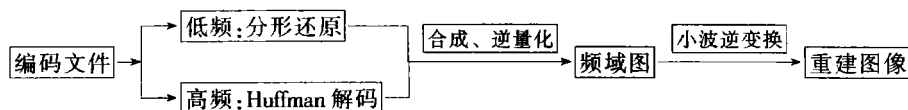
3 图像的压缩编码方案

3.1 图像压缩编码、解码流程

(a) 编码流程



(b) 解码流程



3.2 小波变换与逆变换

由 1.3 的小波选取的方法, 选取的小波一方面必须满足紧支集与消失矩特性, 另一方面它必须便于计算. 因此本文将 256×256 的图像分解为 4×4 的块, 同时选取了 Daubechies 4 小波, 小波系数低通分别为 0.482 962 913 144 534 160, 0.836 516 303 737 807 940, 0.224 143 868 042 013 390, -0.129 409 522 551 260 370; 高通为 -0.129 409 522 551 160 370, -0.224 143 868 042 013 390, 0.836 516 303 737 807 940, -0.482 962 913 144 534 160. 其变换与逆变换的过程在 1.2 中已说明.

3.3 量化与分解、合成

对图像实施小波变换后,成为一系列 4×4 的频域矩阵,将所有这些矩阵中相同位置的元素取出来,求其平方和,可以得出频域图的能量分布.实验表明,低频部分(0,0)、(0,1)、(1,0)集中了低频的大部分能量.因此,对一幅 256×256 图像(共 $(256/4) \times (256/4) = 4096$ 块,可以对变换后的块做如下分解:

提取每块(0,0)元素,得到一个 64×64 的频域子图,类似地,分别提取各方阵中(0,1)、(1,0)位置上的元素,又可得到2幅 64×64 频域子图.以下将对此3幅子图进行分形编码.

根据实验,频域图的能量主要集中在左上部,离左上角越远,能量越低.因此,对其余元素,先进行量化:设量化因子为 $Q(\text{uality})$, Y 是频域方阵, Z 是量化后的矩阵,则 $z_{ij} = [y_{ij}/Q_{ij}]$, 其中, $[\cdot]$ 表示取整运算, $Q_{ij} = 1 + (1 + i + j) * Q$ 且 $1 + i + j$ 称为量化步长.对此进行 Huffman 编码与解码.

在复原图像时,将要进行逆量化计算,其公式为: $y_{ij} = z_{ij} * Q_{ij}$. 合成时首先将3幅低频子图还原,然后加上逆量化后的高频部分.最后进行逆小波变换.

3.4 分形编码与还原

分形编码步骤为:对每一频域方块,分别提取(0,0)、(0,1)、(1,0)位置分量,组成 64×64 的方块,每一元素的取值范围是 $[-512, 510]$,对每一元素除以2,使其取值范围变为 $[-256, 255]$.取区块的大小为 4×4 ,它相应于原图的 16×16 区域.然后求其IFS码,即求出其匹配域块的位置 x 和 y ,同构变换方式 m ,亮度缩小 c 和亮度平移 o ,然后对它们进行编码.具体方法可以参考文[3].

分形解码步骤为:译码形成IFS码,由IFS码构造出重构子图.

3.5 游程编码与解码

假定量化因子 $Q > 3$,则量化后系数取值范围为 $[-51, 51]$,对系数用 Symbol 和 Value 来编码.由于经过量化后,为0系数已经占了相当大的数目,因此,用3个符号(C0, C1, C2)来表示不同0的连续个数.Symbol 与 Value 的含义如表1所示.其中,Symbol 的权重由多幅图像编码的统计特性给出.

表1 Symbol 与 Value 的含义
Tab.1 The meaning of Symbol and Value

Symbol	Value 的含义	Value 所占空间/bits	Symbol 权重
C0	0~15个0	4	27
C1	16~79个0	6	8
C2	80~143个0	6	8
C3	-1, 1	1	3
C4	$[-3, -2], [2, 3]$	2	3
C5	$[-7, -4], [4, 7]$	3	2
C6	$[-15, -8], [8, 15]$	4	2
C7	$[-31, -16], [16, 31]$	5	1
C8	$[-63, -32], [32, 63]$	6	1

可以根据权重来构造码表的 Huffman 树来对符号进行编码:

对频域方块的高频部分,采用游程编码.把二维系数经过 ZigZag 扫描转换成一维排

列, 它的扫描顺序为(2,0),(1,1),(0,2),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0),(3,1),(2,2),(1,3),(2,3),(3,2),(3,3). 扫描顺序影响着 0 游程编码的效率. 并用编码 0/0 来表示游程的结束.

解码时, 首先读取 Symbol, 然后取出 Symbol 所代表的相应的 Value, 直到碰到编码 0/0 时表示解码结束.

4 实验与结论

对标准的 256 色灰度黑白图像测试了本文算法的性能, 结果如表 2.

表 2 标准 256 色灰度黑白图像的压缩结果

Tab.2 The compression effect of standard imges with 256 colors

样图	压缩比(Gr)	信噪比(PSNR)/dB
Lena(256 × 256)	11.60:1	31.346
Girl(256 × 256)	13.22:1	30.573
Playboy(256 × 256)	10.49:1	30.746

由以上实验可以看出, 本文算法在保证质量的前提下, 具有较高的压缩比, 图像的压缩率及客观质量均优于 CCITT 的 JPEG 标准.

对彩色图像, 首先将其分解为 RGB 三基色后作变换: $(Y, U, V)^T = A(R, G, B)^T + B$, 其中, $A = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.0, & 0.587 & 0.0, & 0.144 & 0.0 \\ -0.168 & 74, & -0.331 & 26, & -0.500 \\ 0.500, & -0.418 & 69, & -0.081 & 31 \end{bmatrix}^T$, $B = (0, 255.0/2, 255.0/2)^T$. 可以得到相应的亮度分量 Y 与色度分量 U 和 V 的灰度图, 然后分别对 Y 序列图像, U 系列图像和 V 系列图像进行压缩编码. 本文选取为 WINDOWS 下 CLOUD.BMP 等图像作测试, 获得压缩比为 18.26:1, 信噪比为 33.468 dB 的好效果.

参考文献:

- [1] 肯尼思-法尔科内. 分形几何-数学基础及其应用[M]. 曾文曲等译. 沈阳: 东北大学出版社, 1991. 1 ~ 370.
- [2] 齐东旭. 分形及其计算机生成[M]. 北京: 科学出版社, 1994. 1 ~ 150.
- [3] 吴怡敏. 分形图像压缩方法研究[D]. 广州: 中山大学, 1997.

Image Compression Based on Wavelet and Fractal

FAN Zhu-jun *

Abstract: A lose image compression based on wavelet and fractal is presented. The image is decomposed into different frequency components by wavelet translation. Then, the components are encoded by means of iterated function systems and Huffman tree method. Experiments show that the method presented here has better compress ratio under guarantee the quality of recovery image.

Keywords: wavelet translation; iterated function system (IFS); Huffman tree

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China