

非严格双曲守恒律组大范围连续解存在性^{*}

叶小平

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 证明了一类非严格双曲守恒律组初值问题大范围连续解的存在性, 该方程组在石油开采、弹性理论等方面有着重要应用.

关键词: 非严格双曲; 初值扰动; 整体连续解

中图分类号: O175.29 **文献标识码:** A

对于非线性双曲律组初值问题来说, 解的奇性发展是一个重要研究课题, 其中基本问题之一是确定何时不出现间断或者说何时存在大范围光滑解或连续解. 这在严格双曲的情形已有基本的结果^[1], 但当“特征速度”出现“重合”即非严格双曲时会遇到较大的困难. 本文讨论在石油开采等应用过程中提出的一类非严格双曲守恒律组初值问题的整体连续解问题. 该初值问题如下

$$\begin{cases} s_t + f(s, c)_x = 0 & s(x, 0) = s_0(x) \\ (sc)_t + (cf(s, c))_x = 0 & c(x, 0) = c_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $s(x, t)$ 是渗透度, $c(x, t)$ 是聚合物在水中的浓度, $f(s, c)$ 是相应的流函数^[2~4]. 且满足以下条件(I)^[3,4]:

在 $D = [\delta, 1] \times [0, 1]$ 上有直到二阶的连续偏导数, 且

$$M = \sup\{|f_s|, |f_c|, |f_{ss}|, |f_{cc}|, |f_{sc}| < \infty, f_c > 0, f_{ss} < -\delta < 0$$

其中, δ, δ_0 均为充分小的正常数.

方程组(1)的特征值分别为 $\mu_0 = 0$ 和 $\mu = s^2 g_s$, ($g = f/s$). 在实际问题中多考虑 $s > \delta$ 所以方程组(1)的非严格双曲退化曲线(迁移曲线) Γ 由 $g_s = 0$ 或 $f_s = g$ 给出. 由文[3,4]的假设, 在 Γ 上 $s = T(c)$ 是 c 的严格增函数.

1 主要结果和基本引理

定理 设有条件(I)成立; 且

$$(s_0, c_0) \in D, TV(s_0) < \infty, TV(c_0) < \infty, TV(c'_0) < \infty,$$

$$g_s(s, c) \geq 0, |g_x(s_0, c_0)| \leq M', 0 \leq c'_0 \leq M''$$

则方程组(1)存在整体连续的弱解 $(s(x, t), c(x, t))$. (M', M'' 为正常数).

引理 1^[5] 在定理的假设之下, 对任意 $T > 0$, 在 $\Pi_T = \mathbf{R} \times [0, T]$ 上存在弱解 $(s(x, t), c(x, t))$, 且

^{*} 基金项目: 中山大学高等学术研究中心基金项目 (99M1)

收稿日期: 2000-01-19; 作者简介: 叶小平 (1955~), 男, 博士, 副教授

$$(s, c) \in D, s(\cdot, t) \in BV, c(x, t) \in C^1$$

这里 $TV(h)$ 表 h 全变差, BV 表有界变差函数组成的 Banach 空间.

引理 2 在光滑解的意义下方程组(1)等价于如下的初值问题:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + \tilde{f}(s, c)\eta = 0 & \tilde{u}(\eta, 0) = (\tilde{u}_0 - [T(c_0)]^{-1})(\eta) \\ c_t = 0 & c(\eta, 0) = c_0(\eta) \end{cases} \quad (2)$$

且方程组(1)的迁移曲线 $s = T(c)$ 与方程组(2)的迁移曲线 $\tilde{u} = 0$ 对应. 其中,

$$\tilde{u} = \frac{1}{s} - [T(c)]^{-1} \quad f(\tilde{u}, c) = -g\left[\frac{1}{\tilde{u} + [T(c)]^{-1}}, c\right]$$

而 η 由下式定义

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\eta, t) = g(x(\eta, t), t) \quad x(\eta, 0) = \int_0^\eta \frac{d\sigma}{s_0(\sigma)} \quad (3)$$

证明 若 $s(x, t), c(x, t)$ 是方程组(1)的光滑解, 应有

$$\begin{aligned} (sc)_t + (cf(s, c))_x &= s_t c + c_t s + cf_x + c_x f = \\ &= (s_t + f_x)c + \left[c_t + \left(\frac{f}{s}c_x\right)\right]s = (c_t + gc_x)s \end{aligned}$$

故方程组(1)等价于下述初值问题:

$$\begin{cases} s_t + f(s, c)_x = 0 & s(x, 0) = s_0(x) \\ c_t + gc_x = 0 & c(x, 0) = c_0(x) \end{cases} \quad (4)$$

另外
$$\begin{aligned} s_t + f_x &= s_t + (sg)_x = (s_t + gs_x) + sg_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = \dot{s} + s^2 g_\eta = \\ &= -s^2 \left(-\frac{\dot{s}}{s^2} - g_\eta\right) = -s^2 \left\{\left(\frac{1}{s}\right) - g_\eta\right\} \end{aligned}$$

这里
$$(\cdot)^\circ \triangleq \frac{\partial}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial x}$$

在不引起混淆的情况下仍记“ $\circ$ ”为“ $\partial/\partial t$ ”, 注意到方程组(4)中第2式, 可得与方程组(1)等价的初值问题

$$\begin{cases} u_t + \tilde{f}(u, c)\eta = 0 & u(\eta, 0) = u_0(\eta) \\ c_t = 0 & c(\eta, 0) = c_0(\eta) \end{cases} \quad (5)$$

其中
$$u = \frac{1}{s}, \tilde{f}(u, c) = -g\left[\frac{1}{u}, c\right].$$

初值问题(5)的特征值分别为 0 和 $\tilde{f}_u$, 但是

$$\tilde{f}_u = \left[-g\left[\frac{1}{u}, c\right]\right]_u = -g_s\left[-\frac{1}{u^2}\right] = s^2 g_s$$

所以问题(5)的迁移曲线为 $g_s = 0$ 或 $\tilde{f} = 0$ 或 $u = 1/T(c)$. 另外

$$0 = (u - [T(c)]^{-1})_t + \tilde{f}(u - [T(c)]^{-1} + [T(c)]^{-1}, c)\eta = \tilde{u}_t + \tilde{f}(\tilde{u}, c)\eta$$

其中
$$\tilde{u} = u - [T(c)]^{-1}, \quad \tilde{f}(\tilde{u}, c) = \tilde{f}(\tilde{u} + [T(c)]^{-1}, c)$$

这样就有与问题(5)等价的初值问题(2). 而方程组(2)的迁移曲线可表为 $\tilde{u} = 0$. 引理 2 即证.

将方程组(2)用 R -不变量表出

$$\begin{cases} \tilde{f}_t + \tilde{f}_\eta \tilde{f} = 0 & \tilde{f}|_{t=0} = \tilde{f}(\tilde{u}_0, c_0) \\ c_t = 0 & c|_{t=0} = c_0 \end{cases} \quad (6)$$

即方程组(2)相应于特征值 0 的不变量为 $w = f$, 相应于特征值 $f = -\bar{u}$ 的为 $z = c$.

引理 3^[4] 设 $s(x, t)$ 和 $c(x, t)$ 为引理 1 所确定, 则 $s(x, t)$ 是 Krushkov 熵解^[6], $c(x, t)$ 是(4)中第 2 式的光滑解; 并且 (s, c) 在 L^1 意义下关于初值是稳定的和唯一的.

引理 4 在定理的假设之下, 对于每一个 $\epsilon > 0$, 当 $(f_0, c_0) \in D'_\epsilon$ 时初值问题(6)存在大范围的光滑解 (f^ϵ, c^ϵ) , 同时成立

$$M \leq f^\epsilon \leq M', \quad -M' \leq f^\epsilon_\eta \leq M \quad (7)$$

其中, $M = \inf f$, $M' = \sup f$, 且 M, M', M 与 ϵ 无关; 而

$$D'_\epsilon = \{(f, c) \mid f(\epsilon, c) \leq f(\bar{u}, c) \leq f(M, c), 0 \leq c \leq 1\}$$

证明 当 $(\bar{s}, \bar{c})$ 是方程组(4)的光滑解时, 由引理 3 可知, 对引理 1 所确定的“解” (s, c) 而言, $\bar{c}$ 和 c 是几乎处处相等的. 这样, 在所考虑的情况下, 方程组(6)可以看做含有“已知”参量 c 的一阶双曲方程式, 故存在 $\tau > 0$, 使得当 $(x, t) \in \Pi_\tau = (-\infty + \infty) \times [0, \tau]$ 时方程组(6)有局部光滑解. 由条件(I)和定理的假设得

$$f_{\bar{u}} = f_u = -g(1/u, c)_u = s^2 g_s \geq 0$$

$$f_{\bar{u}\bar{u}} = f_{uu} = (s^2 g_s)_u = 2s(-1/u^2)g_s + s^2 g_{ss}(-1/u^2) = -s^3(2g_s + sg_{ss})$$

$$\text{但} \quad g_{ss} = (g_s)_s = \left(\frac{f_s - g}{s}\right)_s = \frac{(f_{ss} - g_s)s - (f_s - g)}{s^2} = -\frac{f_{ss} - g_s - g_s}{s} = \frac{f_{ss} - 2g_s}{s}$$

$$f_{\bar{u}\bar{u}} = -s^3(2g_s + f_{ss} - 2g_s) = -s^3 f_{ss} \geq \delta \hat{\phi} > 0$$

$$f_c = f_c = -g(1/u, c)_c = -f_c/s < 0$$

做如下的区域 D_ϵ , 其中 ϵ 为充分小的任意给定正常数

$$D_\epsilon = \{(\bar{u}, c) \mid \epsilon \leq \bar{u} \leq M, 0 \leq c \leq 1\}$$

在 D_ϵ 内, 由方程

$$w = f(\bar{u}, c)$$

可解出 $\bar{u} = f^{-1}(w, c) = h(w, c)$

这样 $(\bar{u}, c) \in D_\epsilon \Leftrightarrow (w, c) \in D'_\epsilon$

此时, D_ϵ 和 D'_ϵ 分别是方程组(2)和(6)的严格双曲区域. 作方程组(6)相应于特征值 $\lambda = f_{\bar{u}}$ 的特征

$$\frac{d}{dt} \eta(t; \eta_0, t_0) = \lambda(w, c)(\eta(t; \eta_0, t_0), t) \quad \eta(t_0, \eta_0, t_0) = \eta_0 \quad (8)$$

在其上有 $f(\eta(t; \eta_0, t_0), t) = f(\eta(0; \eta_0, t_0), 0) = f(\eta, 0) \quad (\eta = \eta(0; \eta_0, t_0), 0)$

若 $(f, c_0) \in D'_\epsilon$, 则有

$$f(\bar{u}(\eta_0, t_0), c(\eta_0, t_0)) = f(\bar{u}(\eta, 0), c(\eta, 0)) \geq f(\epsilon, c(\eta));$$

但 $\eta_0 > \eta$, 由定理假设 $c(\eta) = c_0(\eta)$ 单调增, 可知 $c(\eta) < c_0(\eta_0)$; 而 $f_c < 0$, 所以

$$f(\epsilon, c(\eta)) > f(\epsilon, c(\eta_0)).$$

这样, 对所考虑的 (η_0, t_0) 成立

$$f(\bar{u}(\eta_0, t_0), c(\eta_0, t_0)) > f(\epsilon, c_0(\eta_0))$$

将式(8)关于 η_0 求导有

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \eta}{\partial \eta_0}(t; \eta_0, t_0) \right] = (\lambda_{ww} w \eta + \lambda_{cc} c \eta) + \frac{\partial \eta}{\partial \eta_0}(t; \eta_0, t_0)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \eta_0}(t_0; \eta_0, t_0) = 1$$

由此解出 $\frac{\partial \eta}{\partial \eta_0} = \exp \left\{ \int_0^t (\lambda_w w \eta + \lambda_c c \eta)(\eta(\tau; \eta_0, t_0), \tau) d\tau \right\}$

沿特征线(8)

$$w(\eta(t; \eta_0, t_0), t) = w(\eta(0; \eta_0, t_0), 0) = w_0,$$

所以 $w \eta(\eta(t; \eta_0, t_0), t) = (w_0)_\eta \frac{\partial \eta}{\partial \eta_0}$

由定理的假设和式(3)知

$$\begin{aligned} (w_0)_\eta &= (f_0)_\eta = [-g(s_0, c_0)]_\eta = -(g_{s_0}(s_0)_\eta + g_{c_0}c_0) = -g_{s_0}(s_0)_x \frac{\partial x}{\partial \eta} + g_{c_0}(c_0)_x \frac{\partial x}{\partial \eta} = \\ &= -s_0\{g_{s_0}(s_0)_x + g_{c_0}(c_0)_x\} = -s_0(x)g(s_0(x), c_0(x))_x \geqslant -M' \end{aligned}$$

在方程组(6)中, 将 $w_t + \lambda_w w \eta$ 关于 η 求导有

$$(w \eta)_t + (\lambda_w w \eta + \lambda_c c \eta) w \eta + \lambda_w w \eta = 0$$

令 $\alpha = w \eta$, $\beta = c \eta$, 可得

$$\alpha_t + (\lambda_w + \lambda_c \beta) \alpha + \lambda_c \alpha \beta = 0;$$

设 N 是 α, β 在 Π_t 的上界, 而 M 是使得

$$0 \leqslant (f_0)_\eta \leqslant M, 0 \leqslant \tilde{c} \leqslant M$$

成立的正常数, 又设

$$\alpha = \bar{\alpha} + M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^t)$$

其中, L, P 是待定的正常数. 则有

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ \bar{\alpha} + M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^t) \right\}_t + (\lambda_w \alpha + \lambda_c \beta) \left\{ \bar{\alpha} + M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^t) \right\} + \\ &\lambda \left\{ \bar{\alpha} + M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^t) \right\} = \\ &\bar{\alpha}_t + \frac{N}{L^2}(Le^t + (\lambda_w \alpha + \lambda_c \beta) \bar{\alpha} + (\lambda_w \alpha + \lambda_c \beta) \left\{ M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^t) + \lambda \left\{ \bar{\alpha} \eta + \frac{N}{L^2} + 2\eta \right\} \right\} = \\ &\bar{\alpha}_t + \lambda \bar{\alpha} \eta + \frac{N}{L^2}(2\lambda \eta + PLe^t) + (\lambda_w \alpha + \lambda_c \beta) + \lambda_w \left\{ M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^t) \right\} \bar{\alpha} + \\ &\left\{ \lambda_w \left\{ M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^t) \right\} + \lambda_c \beta \right\} \left\{ M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^t) \right\} \end{aligned}$$

注意到 $\bar{\alpha}(\eta, 0) = \alpha(\eta, 0) - \left\{ M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^t) \right\} \leqslant 0$

$$\bar{\alpha}(\pm L, 0) = \alpha(\pm L, 0) - \left\{ M + N + \frac{N}{L^2}PLe^t \right\} \leqslant 0$$

若取 $\bar{t} = \sup\{t \mid \bar{\alpha}(\eta, t) \leqslant 0, \forall \eta \in (-L, L) < \infty\}$, 则存在 $\eta \in (-L, L)$, 使有 $\bar{\alpha}_t(\eta, \bar{t}) \geqslant 0$, $\bar{\alpha}_x(\eta, \bar{t}) = 0$. 此时在点 $(\eta, \bar{t})$ 成立

$$\bar{\alpha}_t(\eta, \bar{t}) + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^{\bar{t}}) + \left\{ \lambda_w \left\{ M + \frac{N}{L^2}\eta^2 \right\} + \lambda_c \beta \right\} \left\{ M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PLe^{\bar{t}}) \right\} = 0 \quad (9)$$

由于 λ_η, λ_c 和 β 均有界, 并且

$$\lambda_w = (f_{\bar{u}})_w = [f_h(h(w, c), c)]_w = f_{\bar{u}\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial w} = (-s^3 f_{ss}) \frac{1}{s^2 g_s} = -f_{ss} \frac{s}{g_s} > 0 \quad (\bar{u} = h(w, c))$$

在式(9)中取待定正常数 P 充分大, 则该式不能成立, 故应有 $\bar{t} = +\infty$. 这样对 $\forall (\eta, t) \in [-$

$L, L] \times [0, +\infty]$ 都有

$$\bar{\alpha}(\eta, t) = \alpha(\eta, t) - \left[M + \frac{N}{L^2}(\eta^2 + PL e^t) \right] \leq 0$$

令 $L \rightarrow +\infty$, 成立 $\alpha(\eta, t) - M \leq 0$.

综上所述即可得: $-M' \leq w\eta \leq M$. 由于这里的界与 t 无关, 按局部解的延拓方法, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $(f_0, c_0) \in D'_\varepsilon$ 时, 方程组 (6) 有大范围光滑解 $(f^\varepsilon, c^\varepsilon) = (f^\varepsilon, c) \in D'_\varepsilon$, 并有式 (7) 成立.

2 定理的证明

对于光滑解, 由方程组 (2) 和 (6) 的等价性可知方程组 (1) 和 (6) 的等价性, 从而存在 $s^\varepsilon = \gamma(f^\varepsilon, c^\varepsilon)$ (γ 为 f^ε 和 c^ε 的连续可微函数) 和 c^ε 满足

$$\begin{cases} s_t^\varepsilon + f(s^\varepsilon, c^\varepsilon)_x = 0 & s^\varepsilon(x, 0) = s_0^\varepsilon(x) \\ (s^\varepsilon, c^\varepsilon)_t + (c^\varepsilon f(s^\varepsilon, c^\varepsilon))_x = 0 & c^\varepsilon(x, 0) = c_0^\varepsilon(x) \end{cases}$$

由 Ascoli-Arzelà 定理可知 $\{f^\varepsilon\}$ 中存在着收敛子列 (不妨设为其本身) 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时收敛于连续函数 f , 由初值问题 (5) 即知定理的结论成立.

参考文献:

- [1] LAX P D. Development of singularity of solution on nonlinear hyperbolic partial differential equations[J]. J Math Phys 1964, 5: 611~613.
- [2] ISAACSON E. Analysis of a singular hyperbolic system of conservation laws[J]. J Diff Equ, 1986 65: 250~268.
- [3] TEMPLE B. Global solution of the Cauchy problem for a class of 2×2 nonstrictly hyperbolic conservation laws[J]. Adv in Appl Math, 1982, 3: 335~375.
- [4] TRIVIO A, WINIHER R. Existence, uniqueness and continuous dependence for a system of hyperbolic conservation laws modelling polymer flooding[J]. SIAM J Math Anal, 1990 4: 905~933.
- [5] 叶小平. 非严格双曲型方程组大范围解的存在性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1997, 36(5): 11~16.
- [6] KRUSHIKOV S N. First-order quasilinear equations in several space variables[J]. Math USSR Sb, 1970 10: 217~273.

Existence of Global Continuous Solutions for a Nonstrictly Hyperbolic System of Conservation Laws

YE Xiao-ping^{*}

Abstract: It is proved for the existence of the global continuous weak solutions for a nonstrictly hyperbolic system of conservation laws which can be widely used in oil-exploiting and elastic theory.

Keywords: nonstrictly hyperbolic; global continuous solutions; initial disturbance

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China