

文章编号: 0529-6579 (2000) 03-0020-05

关于 Hardy 不等式在一个区间上的改进^{*}

黄启亮

(广东教育学院数学系, 广东 广州 510310)

摘要: 用权系数的方法, 对 $p \in [7/6, 2]$, $1/p + 1/q = 1$, 建立 Hardy 不等式的一个加强式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p < q^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{15}{196} \cdot \frac{1}{n^{1/q} + 3436} \right) a_n^p.$$

关键词: Hardy 不等式; 加强; 权系数

中图分类号: O178 文献标识码: A

1 不等式的加强

设 $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $a_n \geq 0 (n \in \mathbf{N})$, $0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$. 则 Hardy 不等式可表述为^[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p < q^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \quad (1)$$

这里, $q^p = [p/(p-1)]^p$, 是最佳常数. 1998 年, 杨必成等^[2] 用权系数的估算方法对(1)式在 $p = 2$ 的情况作了如下加强型的改进

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{n}+5} \right) a_n^2 \quad (2)$$

关于不等式加强的课题, 1991 年徐利治^[3] 首倡对 Hilbert 不等式作尝试. 几年来, 杨必成等对 Hilbert 不等式以及 Hardy-Hilbert 不等式的改进工作, 取得了很大进展^[4~6]. 本文仍用权系数的方法, 就 $7/6 \leq p \leq 2$ 的情况估算如下形式的权系数

$$W_p(k) = k^{1/q} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1/p}} \right)^{p-1} \quad (3)$$

如文[2] 在评注中所指, 当 $p \neq 2$ 时, 估算(3)的难度将较大. 下面要用到 Bernoulli 不等式与 2 个已知的关于幂和的不等式(文[2, 7]):

$$(1+x)^a \leq 1+ax \quad (x \geq -1, 0 < a \leq 1) \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1/p}} \leq \frac{p}{p-1} n^{1-1/p} - \frac{p}{p-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^{1/p}} + \frac{1}{12p} - \frac{1}{12pn^{1+1/p}} \quad (p > 1) \quad (5)$$

* 收稿日期: 1999-05-26; 作者简介: 黄启亮 (1961~), 男, 讲师.

$$\frac{1}{(p-1)k^{p-1}} + \frac{1}{2k^p} < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \frac{1}{(p-1)k^{p-1}} + \frac{1}{2k^p} + \frac{p}{12k^{p+1}} \quad (p > 1, k \in \mathbf{N}) \quad (6)$$

2 几个引理

引理1 设 $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, 在 $[1, +\infty)$ 上定义函数 $g(x)$ 为:

$$g(x) = -\frac{(2p+1)(3p+1)}{12p^2} \cdot \frac{1}{x^{1/q}} + \frac{1}{2qx} - \frac{1}{12pqx^2}$$

则有不等式 $(1+g(x))^{p-1} \leq 1 + (p-1)g(x)$ ($x \in [1, +\infty)$).

证明 因 $x \geq 1, q \geq 2 > 1, 1/x^{1+1/q} \geq 1/x^2$, 所以

$$g'(x) = \frac{6p^2+5p+1}{12p^2} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^{1+1/q}} - \frac{1}{2qx^2} + \frac{1}{6pqx^3} > 0,$$

$$\text{及} \quad g(x) \geq g(1) = -\frac{6p^2+5p+1}{12p^2} + \frac{p-1}{2p} - \frac{p-1}{12p^2} = -\frac{1}{p} > -1,$$

由 Bernoulli 不等式, 有

$$(1+g(x))^{p-1} \leq 1 + (p-1)g(x) \quad (0 < p-1 \leq 1)$$

证毕.

引理2 设 $2 \leq q \leq 7$ ($p = q/(q-1)$). 定义函数 $h(q), s(q)$ 为

$$h(q) = -4q^3 + 20q^2 + 49q - 18p^2 + 67p - 1, \quad s(q) = 11pq^2(q+1)(2q+1)/20580,$$

则对一切 $2 \leq q \leq 7$, 有 $h(q) \geq 11/3 \geq s(q)$.

证明 (1) 当 $2 \leq q \leq 6$ 时, 有

$$6/5 \leq p \leq 2$$

$$\text{及} \quad h(q) \geq -4 \times 6q^2 + 20q^2 + 49q - 18 \times 2p + 67p - 1 \geq -4 \times 6q + 49q + 31p - 1 \geq 86.2 > 11/3;$$

(2) 当 $6 \leq q \leq 7$ 时, 有 $7/6 \leq p \leq 6/5$, 注意到 $dp/dq = -(p-1)^2$, 有

$$\begin{aligned} h'(q) &= -12q^2 + 40q + 49 + 36p(p-1)^2 - 67(p-1)^2 = \\ &= -12q^2 + 40q + 36p^3 - 139p^2 + 170p - 18 \leq \\ &= -12 \times 6q + 40q + 36 \times (6/5)p^2 - 139p^2 + 170p - 18 \leq \\ &= -32q - 95.8 \times (7/6)p + 170p - 18 < 0, \text{ 故有 } h(q) \geq h(7) = 11/3; \end{aligned}$$

(3) 当 $2 \leq q \leq 7$ 时, $7/6 \leq p \leq 2$, 因

$$d(pq)/dq = d(p+q)/dq = 1 + dp/dq = 1 - (p-1)^2 \geq 0$$

于是 $s(q) = 11pq \cdot q(q+1)(2q+1)/20580$ 关于 q 在 $[2, 7]$ 上是增函数, 故

$$\max_{2 \leq q \leq 7} s(q) = (11/20580)(7/6) \cdot 7^2(7+1)(2 \cdot 7+1) = 11/3$$

引理3 设 $k \in \mathbf{N}, 7/6 \leq p \leq 2, 1/p + 1/q = 1$. 定义 $Q(k)$ 为

$$\begin{aligned} Q(k) &= \frac{(2p+1)(3p+1)}{12p} \cdot \frac{1}{k^{1/q}} - \frac{p+q}{q+1} \cdot \frac{1}{k} + \frac{(2p+1)(3p+1)}{12pq} \cdot \frac{1}{k^{1+1/q}} - \\ &\quad \frac{2q^2+3q+9p-3}{6q(2q+1)} \cdot \frac{1}{k^2} - \frac{3p-2}{12q^2} \cdot \frac{1}{k^3} \end{aligned} \quad (7)$$

则 $Q(1) \geq 11q/246960$.

证明 取 $k=1$ 及注意到以下事实:

$$pq = p+q, p^2q = p^2+pq, pq^3 = q^3+pq^2, p/q = (p-1), pq \cdot (p+q) = (p+q)^2$$

有以下 2 式

$$Q(1) = \left[\left(\frac{(2p+1)(3p+1)}{12p} + \frac{(2p+1)(3p+1)}{12pq} - \frac{3p-2}{12q^2} \right) - \frac{p+q}{q+1} \right] - \frac{2q^2+3q+9p-3}{6q(2q+1)};$$

$$\left[\left(\frac{(2p+1)(3p+1)}{12p} + \frac{(2p+1)(3p+1)}{12pq} - \frac{3p-2}{12q^2} \right) - \frac{p+q}{q+1} \right] \cdot 12pq(q+1) = (9q^2+21p+12q-1)(q+1) - 12(p+q)^2 = 6p^2+27p+17q-1$$

于是 $12pq(q+1)(2q+1)Q(1) = (6p^2+27p+17q-1)(2q+1) - (2q^2+3q+9p-3)(2pq+2p) = -4q^3+20q^2+49q-18p^2+67p-1$

故由上式及引理 2, 对 $2 \leq q \leq 7(1/p+1/q=1)$, 有

$$Q(1) = \frac{1}{12pq(q+1)(2q+1)} \cdot h(q) \geq \frac{1}{12pq(q+1)(2q+1)} \cdot s(q) + \frac{11q}{246960}.$$

引理 4 对任意 $k \in \mathbf{N}$, $7/6 \leq p \leq 2(1/p+1/q=1)$, 有 $Q(k)(a_0k^{1/q}+b_0) \geq 2q$, 其中 $a_0 = 196/15$, $b_0 = r_0a_0$, $r_0 = 3436$.

证明 当 $k=1$ 时, 由引理 3, 有 $Q(1)(a_0+b_0) \geq (11q/246960) \cdot (196/15) \cdot 3437 > 2q$;

当 $k \geq 2, p \leq 2$ 时, 有 $k^{1/p} \geq \sqrt{2}$. 因 $\sqrt{2} < 3/2$, 有

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \cdot \left[\frac{(2p+1)(3p+1)}{2p} - \frac{2q^2+3q+9p-3}{2q+1} \cdot \frac{1}{k^{1/p}} - \frac{3p-2}{2q} \cdot \frac{1}{k^{1+1/p}} \right] \geq \\ & \frac{6p^2+5p+1}{\sqrt{2}p} - \frac{2q^2+3q+9p-3}{2q+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - \frac{3p-2}{2q} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} > \\ & \left\{ \frac{2(6p^2+5p+1)}{3p} - \frac{3p-2}{3q} \right\} - \frac{2q^2+3q+9p-3}{2q+1} = \\ & \left\{ \frac{12p^2+10p+2}{3p} - \frac{(3p-2)(p-1)}{3p} \right\} - \frac{2q^2+3q+9p-3}{2q+1} = \\ & \frac{-2q^2+13q+8}{2q+1} > 0 \quad (2 \leq q \leq 7) \end{aligned} \quad (8)$$

注意到 $p^2q = p^2+pq$ 及 $6q(2q+1) \cdot 2 > 12p(q+1)$, $12q^2 \cdot 2^2 > 12p(q+1)$, 有

$$\left[\frac{(2p+1)(3p+1)}{12p} r_0 - \frac{p+q}{q+1} - \frac{p+q}{q+1} \cdot r_0 \cdot \frac{17}{24} \right] \cdot 12p(q+1) = 3436(6p^2+5p+1)(q+1) - 29218p(p+q) = 12014p^2+25758p+12014q+3436 \quad (9)$$

$$\left[-\frac{2q^2+3q+9p-3}{6q(2q+1)} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3p-2}{12q^2} \cdot \frac{1}{2^2} \right] \cdot 12p(q+1) > -(2q^2+3q+12p) \quad (10)$$

将 $Q(k)(a_0k^{1/q}+b_0)$ 乘开, 由 (8), (9), (10) 式, 并注意到 $k^{1/p} \geq \sqrt{2} > 24/17$, $k^{1/p-1/q} \geq 1$ ($p \leq q$), 可得

$$\begin{aligned} & k^{1/p} \frac{1}{a_0} \left[Q(k)(a_0k^{1/q}+b_0) - \frac{(2p+1)(3p+1)}{12p} a_0 \right] = \\ & \left[\frac{(2p+1)(3p+1)}{12p} r_0 - \frac{p+q}{q+1} \cdot \frac{1}{k^{1/p-1/q}} - \frac{p+q}{q+1} \cdot \frac{r_0}{k^{1/p}} - \frac{2q^2+3q+9p-3}{6q(2q+1)} \cdot \frac{1}{k^{2/p}} - \frac{3p-2}{12q^2} \cdot \frac{1}{k^{1+1/p}} \right] + \\ & \frac{(2p+1)(3p+1)}{12pq} \cdot \frac{1}{k^{1/p}} + \frac{r_0}{6qk} \left[\frac{(2p+1)(3p+1)}{2p} - \frac{2q^2+3q+9p-3}{2q+1} \cdot \frac{1}{k^{1/p}} - \frac{3p-2}{2q} \cdot \frac{1}{k^{1+1/p}} \right] > \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(2p+1)(3p+1)}{12p} r_0 - \frac{p+q}{q+1} - \frac{p+q}{q+1} r_0 \frac{17}{24} \right] - \frac{2q^2+3q+9p-3}{6q(2q+1)} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3p-2}{12q^2} \cdot \frac{1}{2^2} > \frac{1}{12p(q+1)} [(12014p^2 + 25758p + 12014q + 3436) - (2q^2 + 3q + 12p)] > 0 \quad (2 \leq q \leq 7) \quad (11)$$

又注意到 $d(pq)/dp = 1 - (q-1)^2 \leq 0$ ($7/6 \leq p \leq 2 \leq q \leq 7$). 故 $p = 7/6$, 即 $q = 7$ 时, $(2p+1)(3p+1)(pq)$ 取得最小值, 再由 (11) 式得

$$Q(k)(a_0 k^{1/q} + b_0) \geq \frac{(2p+1)(3p+1)}{12pq} \cdot qa_0 \geq \frac{(2(7/6)+1)(3(7/6)+1)}{12(7/6) \cdot 7} \cdot q \cdot \frac{196}{15} = 2q.$$

引理 5 对 (3) 式的 $W_p(k)$ 及任意 $k \in \mathbf{N}$, $7/6 \leq p \leq 2$ ($1/p + 1/q = 1$), 有

$$W_p(k) < q^p \left(1 - \frac{15}{196} \cdot \frac{1}{k^{1/q} + 3436} \right) < q^p \left(1 - \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{k^{1/q} + 3207} \right) \quad (12)$$

证明 由 (5) 式及引理 1, 得

$$\begin{aligned} W_p(k) &\leq k^{1/q} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left[\frac{p}{p-1} n^{1-p} - \frac{p}{p-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^{1/p}} + \frac{1}{12p} - \frac{1}{12p} \cdot \frac{1}{n^{1+1/p}} \right]^{p-1} = \\ &k^{1/q} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left[qn^{1/q} - \frac{(2p+1)(3p+1)}{12p(p-1)} + \frac{1}{2n^{1/p}} - \frac{1}{12p} \cdot \frac{1}{n^{1+1/p}} \right]^{p-1} = \\ &k^{1/q} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p} q^{p-1} n^{(p-1)/q} \left[1 - \frac{(2p+1)(3p+1)}{12p^2} \cdot \frac{1}{n^{1/q}} + \frac{1}{2qn} - \frac{1}{12pq} \cdot \frac{1}{n^2} \right]^{p-1} \leq \\ &k^{1/q} q^{p-1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/q}} \left[1 + (p-1) \left(-\frac{(2p+1)(3p+1)}{12p^2} \cdot \frac{1}{n^{1/q}} + \frac{1}{2qn} - \frac{1}{12pq n^2} \right) \right] = \\ &k^{1/q} q^{p-1} \left[\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/q}} - \frac{(2p+1)(3p+1)}{12pq} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2/q}} + \frac{p-1}{2q} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2+1/q}} - \frac{1}{12q^2} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{3+1/q}} \right] \end{aligned}$$

再由 (6) 式及引理 4, 得

$$\begin{aligned} \frac{W_p(k)}{q^p} &< \frac{k^{1/q}}{q} \left[\left(\frac{q}{k^{1/q}} + \frac{1}{2k^{1+1/q}} + \frac{1+1/q}{12k^{2+1/q}} \right) - \frac{(2p+1)(3p+1)}{12pq} \left(\frac{q}{2k^{2/q}} + \frac{1}{2k^{1+2/q}} \right) + \right. \\ &\left. \frac{p-1}{2q} \left(\frac{1}{(1+1/q)k^{1+1/q}} + \frac{1}{2k^{2+1/q}} + \frac{2+1/q}{12k^{3+1/q}} \right) - \frac{1}{12q^2} \left(\frac{1}{(2+1/q)k^{2+1/q}} + \frac{1}{2k^{3+1/q}} \right) \right] = \\ &1 - \frac{1}{2q} \left[\frac{(2p+1)(3p+1)}{12p} \cdot \frac{1}{k^{1/q}} - \frac{p+q}{q+1} \cdot \frac{1}{k} + \frac{(2p+1)(3p+1)}{12pq} \cdot \frac{1}{k^{1+1/q}} - \right. \\ &\left. \frac{2q^2+3q+9p-3}{6q(2q+1)} \cdot \frac{1}{k^2} - \frac{3p-2}{2q^2} \cdot \frac{1}{k^3} \right] = 1 - \frac{1}{2q} Q(k) \leq \\ &1 - \frac{1}{a_0 k^{1/q} + b_0} = 1 - \frac{15}{196} \cdot \frac{1}{k^{1/q} + 3436} \end{aligned}$$

而 $a_0 k^{1/q} + b_0 < 14(k^{1/q} + 3207)$, 故 (12) 式成立. 证毕.

3 定理及评注

定理 设 $7/6 \leq p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, $a_n \geq 0$ ($n \in \mathbf{N}$), $0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p < q^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{15}{196} \cdot \frac{1}{n^{1/q} + 3436} \right) a_n^p \quad (13)$$

特别地有更简化形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p < q^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{14(n^{1/q} + 3207)} \right) a_n^p \quad (14)$$

证明 由 Hölder 不等式, 有

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{-\frac{1}{pq}} \cdot k^{\frac{1}{pq}} a_k \right)^p \leqslant \frac{1}{n^p} \left(\sum_{k=1}^n k^{-1/p} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{k=1}^n k^{1/q} a_k^p \right) = \sum_{k=1}^n k^{1/q} \frac{1}{n^p} \left(\sum_{j=1}^n j^{-1/p} \right)^{p-1} a_k^p$$

而由引理 5, $0 < W_p(k) < q^p \left(1 - \frac{15}{196} \cdot \frac{1}{k^{1/q} + 3436} \right) < q^p \left(1 - \frac{1}{14(k^{1/q} + 3207)} \right) < q^p$,

所以, $0 < \sum_{k=1}^{\infty} W_p(k) a_k^p < q^p \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p < \infty$, 并且^[8] $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n k^{1/q}$

$\frac{1}{n^p} \left(\sum_{j=1}^n j^{-1/p} \right)^{p-1} a_k^p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} k^{1/q} \frac{1}{n^p} \left(\sum_{j=1}^n j^{-1/p} \right)^{p-1} a_k^p = \sum_{k=1}^{\infty} W_p(k) a_k^p$. 于是(13), (14) 式成立.

评注 (13), (14) 式在区间 $7/6 \leqslant p \leqslant 2$ 加强了 Hardy 不等式. 但加强不等式中的内常数未达到最优; 而对一般 $p > 1$ 的情形, 尚未解决加强问题, 需进一步改进.

致谢 作者感谢杨必成教授的指导.

参考文献:

- [1] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. Inequalities[M]. London: Cambridge University Press, 1934. 239 ~ 242.
- [2] 杨必成, 朱匀华. 关于 Hardy 不等式的一个改进[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1998, 37(1): 41 ~ 44.
- [3] HSU L C, WANG Y J. A refinement of Hilbert's double series theorem[J]. J Math Res Exp, 1991, 11(1): 143 ~ 144.
- [4] XU L Z, GUO Y K. Note on Hardy-Riesz's extension of Hilbert's inequality[J]. Chinese Quarterly J Mathematics, 1991, 6(1): 75 ~ 77.
- [5] YANG B C. Some inequalities involving the constants, and application to Carleman's inequality[J]. J Mathematical Analysis and Applications, 1998, 223: 347 ~ 353.
- [6] 杨必成, 高明哲. 关于 Hardy-Hilbert 不等式中的一个最佳常数[J]. 数学进展, 1997, 26(2): 159 ~ 164.
- [7] 朱匀华, 杨必成. Euler 求和公式的改进与幂和的不等式[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1997, 36(4): 21 ~ 26.
- [8] 约翰逊 R, 帕芬伯杰 W E. 现代数学分析基础[M]. 邓永录译. 广州: 中山大学出版社, 1988. 79 ~ 82.

An Improvement on Hardy's Inequality in an Interval

HUANG Qi-liang^{*}

Abstract: In the interval $p \in [7/6, 2]$, $1/p + 1/q = 1$, the author builds a strengthened Hardy's inequality by weight coefficient: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p < q^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{15}{196} \cdot \frac{1}{n^{1/q} + 3436} \right) a_n^p$.

Keywords: Hardy's inequality; strengthen; weight coefficient

^{*} Department of Mathematics, Guangdong Education Institute, Guangzhou 510310, China