

文章编号: 0529-6579 (2000) 03-0006-05

一类时滞波动方程次调和解的存在性^{*}

郭志明¹, 徐远通¹, 林壮鹏²

(1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275; 2. 深圳大学数学系)

摘 要: 利用 Z_p 指标理论讨论一类带有偏差变元的非自治波动方程次调和解的存在性, 在一定的假设条件下, 得到了这类方程存在无穷多个次调和解的条件.

关键词: Z_p 指标理论; 不变泛函; 波动方程; 次调和解

中图分类号: O175.7; O175.27 **文献标识码:** A

1 假设及主要结论

本文讨论如下形式的波动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x, u(t - \tau_1, x), u(t - \tau_2, x), \dots, u(t - \tau_s, x)) \\ u(t, 0) - u(t, \pi) = 0 \quad t \in (0, 2\pi p) \\ u(t, x) = u(t + 2\pi p, x) \quad (t, x) \in (0, 2\pi p) \times (0, \pi) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $T > 0$ 是一个常数, $p > 1$ 为正整数, $f(t + 2\pi, x, u(t - \tau_1, x), u(t - \tau_2, x), \dots, u(t - \tau_s, x)) = f(t, x, u(t - \tau_1, x), u(t - \tau_2, x), \dots, u(t - \tau_s, x))$, $\forall (t, x, u) \in (0, 2\pi p) \times (0, \pi) \times \mathbf{R}$, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s \in \mathbf{R}$ 满足 $\tau_j = r_j 2\pi p$, r_j 是整数, $j = 1, 2, \dots, s$.

对于右端不含时间滞量的波动方程, 已经有许多学者讨论过其周期解的存在性, 如: 张恭庆^[1]、Rabinowitz^[2]等. 但是现有的文章几乎都是研究正常变元的波动方程. 另一方面, Hale 等^[3]对不同形式的泛函微分方程研究了其周期解的存在性. 然而, 他们所研究的对象都是自治方程, 而对含时滞非自治波动方程周期解存在性的研究几乎没有进展.

本文借助于一种 Z_p 群作用下不变的几何指标理论, 讨论上述非自治时滞波动方程 (1) 的次调和解. 本文的基本假设是:

(1) 存在一个关于 t 为 2π 周期的连续可微函数

$$F(t, x, u) \in C^1((0, 2\pi p) \times (0, \pi) \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$$

满足 $F'_u(t, x, u) = f(t, x, u, u, \dots, u)$, $\forall (t, x, u) \in (0, 2\pi p) \times (0, \pi) \times \mathbf{R}$.

(2) $\forall t \in [0, 2\pi p]$, $F(t, x, \cdot)$ 是凸函数, 且存在常数 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ 及 $1 < \beta < 2$, 使

^{*} 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19331061); 中山大学高等学术研究中心基金资助项目

收稿日期: 1999-05-25; 作者简介: 郭志明 (1966 ~), 男, 副教授.

得 $\frac{a_1}{\beta} |u|^\beta \leq F(t, x, u) \leq \frac{a_2}{\beta} |u|^\beta, \forall u \in \mathbf{R}.$

(3) 如果 $u = u(t, x)$ 是以 $2\pi q$ 为最小正周期的周期函数, q 是一个有理数, $F'_u(t, x, u(t, x))$ 也以 $2\pi q$ 为最小正周期, 则 q 是一个整数.

记 S_p 为 p 的最小素因子. 本文的主要结论为以下定理:

定理 在(1), (2), (3) 的假设下, 给定任意的整数 $p > 1$, 若

$$\frac{a_2}{a_1} < \left[\frac{(p-1)S_p}{2(2p-1)} \right]^{\frac{\beta}{2}} \quad (2)$$

则方程(1) 存在无穷多个以 $2\pi p$ 为最小正周期的互不相同的周期解.

2 对偶泛函及 Z_p 指标理论

为简单起见, 假设 F 关于 u 是严格凸的(实际上结论对 F 是凸的情形也成立). 记 G 表示 F 关于变量 u 的 Fenchel 共轭函数, 即

$$G(t, x, u) = \sup_{v \in \mathbf{R}} \{u \circ v - F(t, x, v)\}$$

经过简单验证有:

(1) $G(t, x, \cdot)$ 是凸的, 且 $G(\cdot, x, u)$ 是 2π 周期函数.

(2) $\alpha = \frac{\beta}{\beta-1} > 2$

且 $\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{a_2} \right)^{\alpha-1} |u|^\alpha \leq G(t, x, u) \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{a_1} \right)^{\alpha-1} |u|^\alpha \quad \forall (t, x, u) \in (0, 2\pi p) \times (0, \pi) \times \mathbf{R}.$

记 $Q = [0, 2\pi p] \times [0, \pi]$, 波算子 $\square = \frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^2}$. 以 H 表示 $\square$ 在 $L^2(Q)$ 上的自伴扩张,

则 H 有谱 $\sigma(H) = \{j^2 - (k/p)^2 \mid j = 1, 2, \dots, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$

在 H 的值域 $\mathcal{R}(H)$ 上 H 有逆算子 $\mathcal{K} = H^{-1}$. 记

$$E = \text{span} \left\{ \sin jx \sin \frac{(p-1)t}{p}, \sin jx \cos \frac{(p-1)t}{p} \in L^\alpha(Q, \mathbf{R}), j = 1, 2, \dots \right\}$$

并引入空间 $X = \{u(t, x) \mid u(t, x) \in \mathcal{R}(H) \cap E\}$, 则 $\mathcal{K}$ 是 $L^\alpha(Q, \mathbf{R}) \rightarrow L^\beta(Q, \mathbf{R})$ 的紧的有界自共轭算子. 考虑泛函

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{K}u, u \rangle - \int_Q G(t, x, u), u(t, x) \in X \quad (3)$$

容易验证 J 满足 P. S. 条件. 若 $u^*(t, x)$ 为 J 的临界点, 即 $\theta \in \partial J_X(u^*)$, 则存在

$$\mathcal{B} \in \text{Ker}(H) \cap L^\beta(Q, \mathbf{R})$$

使得 $\mathcal{K}(u^*) + \mathcal{B} \in \partial G_u(t, x, u^*)$

令 $v(t, x) = \mathcal{K}(u^*) + \mathcal{B}$

由互反公式可知

$$v(t, x) \in \partial G_u(t, x, u^*) \Leftrightarrow u^*(t, x) \in F_u(t, x, v).$$

由于 $\square v(t, x) = u^*(t, x)$,

从而 $\frac{\partial v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial x^2} = f(t, x, v, \dots, v)$

考虑到 $v(t, x)$ 关于 t 为 $2\pi p$ 周期函数, 则有 $v(t - \tau_j, x) = v(t, x), j = 1, 2, \dots, s$, 其

中, $\tau_j = 2\pi p r_j$, r_j 为整数, 则 $v(t, x)$ 满足方程(1). 从而, 求解方程(1) 可以化归为求泛函(2) 周期为 $2\pi p$ 的临界点.

以上结论的详细讨论参见文[1].

算子 $\mathcal{N}$ 的谱为 $\sigma(\mathcal{N}) = \left\{ \frac{1}{j^2 - k^2/p^2} \mid j = 1, 2, \dots, k = \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$.

则 $u(t, x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left[c_j^{(1)} \sin jx \sin \frac{(p-1)t}{p} + c_j^{(2)} \sin jx \cos \frac{(p-1)t}{p} \right], \forall u \in X$

其中, $c_j^{(1)}, c_j^{(2)} \in \mathbf{R}, j = 1, 2, \dots$.

如果 $u(t, x)$ 关于 t 有周期 $(2\pi p)/l$, l 是一个正整数, 则

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left[c_j^{(1)} \sin jx \sin \frac{(p-1)lt}{p} + c_j^{(2)} \sin jx \cos \frac{(p-1)lt}{p} \right]$$

$$\mathcal{N}u(t, x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{p^2}{p^2 j^2 - [(p-1)l]^2} \left[c_j^{(1)} \sin jx \sin \frac{(p-1)lt}{p} + c_j^{(2)} \sin jx \cos \frac{(p-1)lt}{p} \right]$$

$$\text{因此 } J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi p} \int_0^\pi \mathcal{N}u(t, x) u(t, x) dx dt - \int_0^{2\pi p} \int_0^\pi G(t, x, u(t, x)) dx dt \leq$$

$$\frac{1}{2} \frac{p^2}{2(p-1)l} \|u\|_{L^2(Q)}^2 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{a_2} \right)^{\alpha-1} \|u\|_{L^\alpha(Q)}^\alpha \leq$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) (2\pi^2 p) \left(\frac{p^2}{2(p-1)l} \right)^{\alpha/(\alpha-2)} (a_2^2)^{(\alpha-1)/(\alpha-2)}$$

$$\text{记 } B_l = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) (2\pi^2 p) \left(\frac{p^2}{2(p-1)l} \right)^{\alpha/(\alpha-2)} (a_2^2)^{(\alpha-1)/(\alpha-2)} \quad (4)$$

总结上面讨论过程, 有如下引理 1 和引理 2, 证明从略.

引理 1 对偶泛函 $J(u)$ 在 X 是上有界的, $J(u) \leq B_l < +\infty$, 其中

$$B_l = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) (2\pi^2 p) \left(\frac{p^2}{2(p-1)l} \right)^{\alpha/(\alpha-2)} (a_2^2)^{(\alpha-1)/(\alpha-2)}$$

引理 2 如果 u 是 J 的临界点, 并且

$$J(u) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) (2\pi^2 p) \left(\frac{p^2}{2(p-1)S_p} \right)^{\alpha/(\alpha-2)} (a_2^2)^{(\alpha-1)/(\alpha-2)}$$

则 $u(t, x)$ 关于 t 有最小正周期 $2\pi p$.

为了得到泛函 $J(u)$ 的临界点, 需要下面的 Z_p 指标理论的知识.

设 Y 是 Banach 空间, $p > 1$ 为给定的自然数, μ 是 Z_p 在 Y 上的线性等距作用, 即 $\mu \in \mathcal{L}(Y, Y)$, $\|\mu x\| = \|x\|, \forall y \in Y$, 且 $\mu^p = \text{id}$, 即 Y 上的恒等算子, 其中 Z_p 是循环群. Y 的一个子集 A 称为是 μ 不变的, 如果 $\mu(A) \subset A$. 映射 $f: A \rightarrow Y$ 称为是 μ 等变的, 如果对 $\forall y \in A, f(\mu y) = \mu f(y)$. 记 $\Sigma = \{A \subset Y \mid A \text{ 是闭的 } \mu \text{ 不变集}\}$, $W = \{z \in \mathbf{C} \mid \arg z = 2\pi j/p, j = 0, 1, \dots, p-1\}$

定义指标 $i_m: \Sigma \rightarrow \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ 如下: 对 $\forall A \in \Sigma, i_m(A) = \min\{k \in \mathbf{N} \mid \text{存在连续映射 } \varphi: A \rightarrow W^k \setminus \{\theta\} \text{ 使得 } \varphi(\mu y) = e^{i_m(2\pi/p)} \varphi(y)\}$

如果不存在这样的映射 φ , 定义 $i_m(A) = +\infty$, 并规定 $i_m(\emptyset) = 0$. 设

$$X_n = \{u(t, x) \in X \mid u(t, x) = \sum_{j=1}^n \sin jx (\xi_j e^{i(p-1)t/p} + \bar{\xi}_j e^{-i(p-1)t/p})\} \quad (5)$$

其中, $\xi_j \in \mathbf{C}, j = 1, 2, \dots, n, \forall n \in \mathbf{N}, \eta, \epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \text{令 } S_{n, \eta, \epsilon} = \{ u(t, x) \in X_n \mid u(t, x) = \sum_{j=1}^n \sin jx (\xi_j e^{i(p-1)t/p} + \bar{\xi}_j e^{-i(p-1)t/p}), \\ | \xi_1 | = \eta, \sum_{j=2}^n | \xi_j | = \epsilon \} \end{aligned}$$

若把 X_n 等价地看作 C^n , 取 $m = p-1$, 应用文 [4] 中的 Borsuk-Ulam 定理, 类似于文 [5] 的讨论可以得到引理 3.

引理 3 对 $\forall n \in \mathbf{N}, \eta, \epsilon > 0, i_{p-1}(S_{n, \eta, \epsilon}) = 2n$.

3 定理的证明

为了应用极大极小原理寻求 J 的临界点, 需用以下 Z_p 形式的形变引理^[5].

引理 4^[5] 设 $J \in C^1(X, \mathbf{R})$ 是满足 (P.S.) 条件的 μ 不变的泛函, 对任意的 $c \in \mathbf{R}$ 及 $K_c = \{ u \in X \mid J(u) = c, \theta \in \partial_X J(u) \}$ 的任意邻域 U , 存在一个常数 $\bar{\epsilon} > 0$, 使得对 $\forall 0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$, 存在连续映射 $\eta: X \rightarrow X$ 满足:

- ① $\eta(u) = u, \forall u \in J_{c+\epsilon}$;
- ② $\eta(u) \in J_{c+\epsilon}, \forall u \in J_{c-\epsilon} \setminus U$;
- ③ η 是一个 μ 等变同胚映射, 其中 $J_h = \{ u \in X \mid J(u) \geq h \}$.

利用引理 4 与 Z_p 指标理论, 有下面的引理 5

引理 5 对整数 j , 定义

$$c_j = \sup_{i_{p-1}(A) \geq j} \inf_{u \in A} J(u) \quad (6)$$

若 $-\infty < c_j < +\infty$, 则 c_j 是 J 的一个临界值. 若 $c = c_j = c_{j+1} = \dots = c_{j+l-1}$, 则 $i_{p-1}(K_c) \geq l$, 其中, $K_c = \{ u \in X \mid J(u) = c, \theta \in \partial_X J(u) \}$.

显然, $-\infty \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq +\infty$. 在上节, 已经证明 $\forall u \in X, J(u) < B_1$, 下面证明 $\forall n \in \mathbf{N}, c_{2n} > -\infty$, 令

$$\eta_0 = \left(\frac{p^2}{2p-1} \right)^{1/(\alpha-2)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\alpha/(\alpha-2)} a_1^{(\alpha-1)/(\alpha-2)} \quad (7)$$

$\forall \epsilon > 0$, 设 $\eta_\epsilon = \eta_0 - \epsilon$, 则 $\forall u \in S_{n, \eta_\epsilon, \epsilon}$,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{H}u, u \rangle - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi G(t, x, u(t, x)) dx dt \geq \\ &= \frac{1}{2} (2\pi^2 p) \sum_{j=1}^n \frac{p^2}{p^2 j^2 - (p-1)^2} |\xi_j|^2 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{a_1} \right)^{\alpha-1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |u|^\alpha dx dt \geq \\ &= \frac{1}{2} \frac{p^2}{2p-1} |\xi_1|^2 (2\pi^2 p) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{a_1} \right)^{\alpha-1} \left(2 \sum_{j=1}^n |\xi_j| \right)^\alpha (2\pi^2 p) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) (2\pi^2 p) \left(\frac{p^2}{4(2p-1)} \right)^{\alpha/(\alpha-2)} (a_1^2)^{(\alpha-1)/(\alpha-2)} + \frac{1}{2} \frac{p^2}{2p-1} (\epsilon^2 - 2\eta_0 \epsilon) (2\pi^2 p) \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性及 $i_{p-1}(S_{n, \eta_\epsilon, \epsilon}) = 2n$ 有

$$c_{2n} = \sup_{i_{p-1}(A) \geq 2n} \inf_{u \in A} J(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) (2\pi^2 p) \left(\frac{p^2}{4(2p-1)} \right)^{\alpha/(\alpha-2)} (a_1^2)^{(\alpha-1)/(\alpha-2)} > -\infty \quad (8)$$

引理 6^[5] 如果 $c = c_j = \dots = c_{j+l-1}, 1 \leq j < j+l-1 \leq 2nN$, 则 K_c 至少含有 l 个不同的临界点.

由引理 1 及上述讨论可知,

$$\forall n \in \mathbf{N}, -\infty < c_{2n} < +\infty$$

再由引理 5.6, $\forall n \in \mathbf{N}$, J 至少存在 $2n$ 个临界点, 它们关于 t 以 $2\pi p$ 为周期. 以下仅须证明所有这些临界点均以 $2\pi p$ 为最小正周期.

事实上, 设 $u^*(t, x)$ 是 J 的临界点, 满足 $u^* \in K_{c_j}$, 则 $J(u^*) = c_j$. 由 (8) 式及假设条件

$$\frac{a_2}{a_1} < \left(\frac{(p-1)S_p}{2(2p-1)} \right)^{\frac{\beta}{2}}$$

$$\text{得 } J(u^*) > \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right] (2\pi^2 p) \left(\frac{p^2}{2(p-1)S_p} \right)^{\alpha/(\alpha-2)} (a_2^2)^{(\alpha-1)/(\alpha-2)} \quad (9)$$

由引理 2 易知, $u(t, x)$ 关于 t 有最小正周期 $2\pi p$. 至此定理证毕.

利用类似的方法可以讨论一般非自治波动方程的周期解和次调和解的存在性. 王志强^[6]利用波算子 $\square$ 的有限维特征子空间得到不含时滞的非自治波动方程的周期解. 其解的个数与空间维数有关. 由于本文考虑了无穷维特征子空间, 得到无穷多个互不相同的周期解. 所以明显地改进了文 [6] 的结果.

参考文献:

- [1] 张恭庆. 临界点理论及其应用[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1986. 164~170.
- [2] RABINOWITZ P. Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equation[J]. Comm Pure Appl Math, 1984, 37: 189~206.
- [3] HALE J K, HUANG W Z. Periodic solutions of singularly perturbed delay equations[J]. Z Angew Math Phys, 1996, 47(1): 57~88.
- [4] WANG Z Q. A Z_p -borsuk-ulam theorem[J]. Chinese Bull Sci, 1989, 34(14): 1153~1157.
- [5] XU Y T. Subharmonics solutions for convex nonautonomous Hamiltonian systems[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1997, 28: 1359~1371.
- [6] WANG Z Q. Multiple periodic solutions for a class of nonlinear nonautonomous wave equations[J]. Acta Math Sinica, New Series, 1989, 5(3): 197~213.

Existence of Subharmonic Solutions for a Class of Retarded Wave Equation

*
GUO Zhi-ming, XU Yuan-tong, LIN Zhuang-peng

Abstract: By means of Z_p geometrical index theory, the existence of subharmonic solutions for a class of wave equation with delays is studied. Under certain conditions, infinitely many subharmonic solutions for this equation are obtained.

Keywords: Z_p geometrical index theory; invariant functional; wave equation; subharmonic solution