

一类满足平衡分布的 Sierpinski 地毯的测度^{*}

马东魁¹, 贾保国²

(1. 中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275; 2. 中山大学力学系)

摘 要: 研究了一类满足平衡分布和基本条件的 Sierpinski 地毯, 采用构造函数的方法解决验证基本条件, 从而得出其 Hausdorff 测度的准确值.

关键词: 分形; Hausdorff 测度; Sierpinski 地毯; 平衡分布; 基本条件

中图分类号: O174.12 **文献标识码:** A

1 问题的引入

计算与估计 Hausdorff 测度是分形几何中很困难的课题, 我们仅知 Cantor 三分集及其变形的 Hausdorff 测度以及文 [1] 中给出一个 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度, 文 [2] 发展了文 [1] 的方法, 提出平衡分布和基本条件的概念, 给出满足基本条件的平衡分布的所有 Sierpinski 地毯 Hausdorff 测度的准确值. 到目前为止, 还没有一种普遍适用于计算一类分形的 Hausdorff 测度的方法, 而都是采用具体问题具体对待的方式.

平面 $\mathbf{R}^2$ 上的单位正方形, 记作 S_0 , n 为自然数且 $n \geq 4$, 在 S_0 中保留 n 个小正方形, 其边长为 $1/n$, 而挖去其余部分的内部, 得到的集合记为 S_1 , S_1 中 n 个小正方形的排列满足 4 个顶点各有 1 个小正方形, 且两两距离大于 0, 每个小正方形的边平行于 S_0 的边, 对 S_1 的每个小正方形重复上述过程, 得到的集合记作 S_2 , 无限重复上述过程, 得到 $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_m \supset \dots$, 非空集合 $S = \bigcap_{m=0}^{\infty} S_m$ 称作 n -Sierpinski 地毯. 易见, S 的 Hausdorff 维数为 1. 用 $H(S)$ 表示 S 的 1 维 Hausdorff 测度, $n=4$ 时, 即文 [1] 所讨论的 Sierpinski 地毯.

在 S_0 上定义分布函数 μ , 满足 $\mu(S_0) = \sqrt{2}$, $\mu(\square_m) = \sqrt{2}/n^m$, $\mu(S_0 - S) = 0$. 易证 μ 是 S_0 上的一个测度, 限制 μ 在 S 上是 S 上的一个质量分布.

记 L 是平行于 S_0 的主或斜对角线且与 S_0 相交的一直线, 记 $d((x, y), L) = l \geq 0$. 其中, $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ 为 S_0 在坐标系中的 4 个顶点. 又记 L 分别与 x 轴, y 轴, x 轴, 直线 $x = 1$; 直线 $x = 1$, 直线 $y = 1$; y 轴, 直线 $y = 1$ 所围三角形为 Δ_L .

定义 1^[2] 条件 $\mu(\Delta_L \cap S_0) \geq l/2$, ($0 \leq l \leq \sqrt{2}$), 叫做基本条件.

引理 A^[2] 所有满足基本条件且平衡分布^[2]的 n -Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度为 $H(S) = \sqrt{2}$.

这样, 欲求一个 n -Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度, 可以通过验证其是否满足平衡分布和基本条件, 平衡分布易验证, 但基本条件的验证往往很困难, 因为当 $n > 4$ 时, S_1 中的

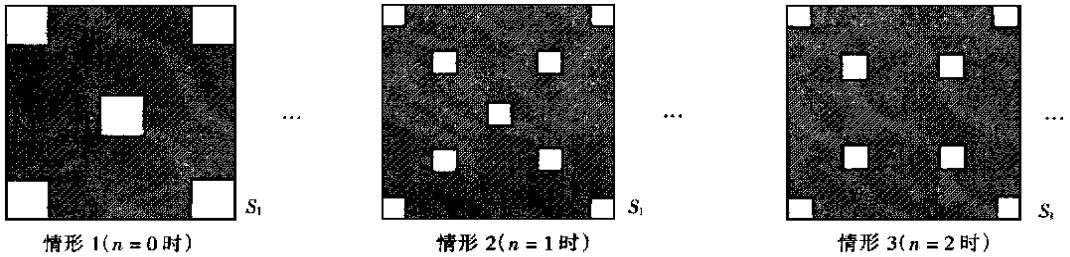
* 基金项目: 教育部博士点基金资助项目 (9555810); 广东省自然科学基金项目 (960014)

收稿日期: 1999-09-20 作者简介: 马东魁 (1964~), 男, 博士, 讲师, 现在华南理工大学数学系工作, 通讯联系人: 贾保国.

基本正方形除四角固定外，其余的基本正方形可以有許多位置，从而用文[1]的方法验证显然不行. 本文继续文[2]的工作，具体给出一类满足基本条件且平衡分布的 n -Sierpinski 地毯，这里采用构造函数的方法解决验证基本条件这一课题，从而得出其 Hausdorff 测度. 可以看出，这种构造方法具有普遍性而且较文[1]简单. 本文的符号和记法沿用文[2]的.

2 本文结果

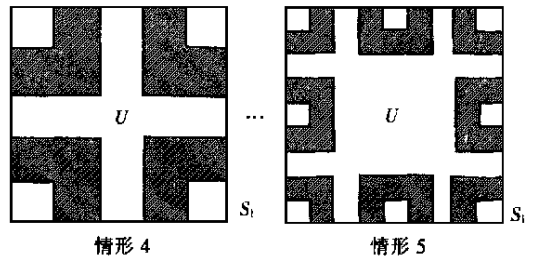
定理 1 按下列情形 1 排列 S_1 中基本正方形的 $(4n+5)$ -Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度 $H(S)=\sqrt{2}$. 这里， $n\geq 0$, S_1 中基本正方形除一个在中心外，其余均在边上，且相邻 2 个的距离为 $3/n$.



定理 2 (1) 按情形 2 形式分布 S_1 中基本正方形的 $(4n+5)$ -Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度 $H(S)=\sqrt{2}$. 这里， $n\geq 0$, S_1 中基本正方形分布在 S_0 的对角线上，且对角线上每相邻 2 个的距离为 $\sqrt{2}/n$. 当 $n=0$ 时与定理 1 中 $n=0$ 时相同.

(2) 按情形 3 形式分布 S_1 中基本正方形的 $(4n)$ -Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度 $H(S)=\sqrt{2}$. 这里， $n\geq 1$, S_1 中基本正方形分布在 S_0 的对角线上，且对角线上每相邻 2 个除中间的距离为 $2\sqrt{2}/n$ 外，均相距 $\sqrt{2}/n$. 当 $n=1$ 时即为文[1]的情形.

定理 3 按下列情形 4 方式分布 S_1 中基本正方形的 5-Sierpinski 地毯及按情形 5 方式分布 S_1 中基本正方形的 9-Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度 $H(S)=\sqrt{2}$. 其中， S_1 的基本正方形除已确定的外，未被确定的基本正方形可在图中空白区域 U 中任一位置(其边分别与 S_0 的边平行).



3 结果的证明

针对定理 1，下列引理成立.

引理 1 对上述地毯，基本条件 $\mu(\Delta L \cap S_0) \geq 1/2 (0 \leq l \leq \sqrt{2})$ 成立.

引理 1 的证明在后面完成. 作 S 向 S_0 的主或斜对角线上的垂直投影，可以得到 $[0, \sqrt{2}]$ 线段上的一个分形，过程如下

记 $F_0 = [0, \sqrt{2}]$ ，在 F_0 上定义压缩比为 $1/(4n+5)$ 的 $2n+3$ 个压缩函数：

$$s_1(x) = \frac{1}{4n+5}x, s_2(x) = \frac{1}{4n+5}x + \frac{2\sqrt{2}}{4n+5}, \dots, s_{2n+3}(x) = \frac{1}{4n+5}x + \frac{4n+4}{4n+5}\sqrt{2}. \{s_1,$$

$s_2, \dots, s_{2n+3}$ 在 $F_0 = [0, \sqrt{2}]$ 上生成一个自相似集 F

$$F = \bigcup_{i=1}^{2n+3} s_i(F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^{2n+3} s_{i_1, \dots, i_k}(F_0) = \bigcap_{k=1}^{\infty} s^k(F_0) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

这里, $s_{i_1, \dots, i_k} = s_{i_1}, \dots, s_{i_k}$ 即函数的复合. 设 $k \geq 0$, 则 $F_k(2n+3)^k$ 个长度为 $\sqrt{2}/(4n+5)^k$ 的不相交线段组成, 每一个这样的线段称作 F_k 的基本线段, 记作 I_k . 又 $F_0 - \bigcap_{i=1}^k F_i$ 是由 $2n+2$ 个长度为 $\sqrt{2}/(4n+5)$ 的开区间, $(2n+2)(2n+3)$ 个长度为 $\sqrt{2}/(4n+5)^2$ 的开区间, $\dots$, $(2n+2)(2n+3)^k$ 个长度为 $\sqrt{2}/(4n+5)^k$ 的开区间组成, 这些开区间分别称为 F_0 的 1 阶, 2 阶, $\dots$, k 阶挖去区间, 易见, $s_i (i = 1, 2, \dots, 2n+3)$ 把挖去区间映成低一阶的挖去区间, 因此

$$s_i(F_0 - F) \subset F_0 - F$$

在 F_0 上归纳定义分布函数 m , 其中, $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, 2n+3\}, k > 0$.

$$m(F_0) = \sqrt{2}, m(F_0 - F) = 0$$

$$m(s_i s_{i_1, \dots, i_k}(F_0)) = \frac{1}{4n+5} m(s_{i_1, \dots, i_k}(F_0)), i = 1, 2n+3$$

$$m(s_i s_{i_1, \dots, i_k}(F_0)) = \frac{2}{4n+5} m(s_{i_1, \dots, i_k}(F_0)), i = 2, 3, \dots, n+1, n+3, \dots, 2n+2$$

$$m(s_i s_{i_1, \dots, i_k}(F_0)) = \frac{3}{4n+5} m(s_{i_1, \dots, i_k}(F_0)), i = n+2$$

易验证, m 是 $F_0 = [0, \sqrt{2}]$ 上的一个测度, 限制 m 在 F 上得到其上的一个质量分布, 显然 $m(F_0 - \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k) = 0$. 又设 $0 \leq l \leq \sqrt{2}$ 易见

$$m(s_i s_{i_1, \dots, i_k}([0, l])) = \frac{1}{4n+5} m(s_{i_1, \dots, i_k}([0, l])), i = 1, 2n+3$$

$$m(s_i s_{i_1, \dots, i_k}([0, l])) = \frac{2}{4n+5} m(s_{i_1, \dots, i_k}([0, l])), i = 2, 3, \dots, n+1, n+3, \dots, 2n+2$$

$$m(s_i s_{i_1, \dots, i_k}([0, l])) = \frac{3}{4n+5} m(s_{i_1, \dots, i_k}([0, l])), i = n+2$$

记 $m(x) = m([0, x]) (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则易见 m 是 $F_0 = [0, \sqrt{2}]$ 上的连续函数.

μ 在下述定义下在 $F_0 = [0, \sqrt{2}]$ 上诱导一个测度, F_0 的 Borel 子集的测度等于这个子集在垂直投影下的原象的 μ 测度, 容易看出, μ 在 F_0 上诱导的这个测度恰好是 m , 因此有

$$\text{引理 2 } \mu(\Delta l \cap S_0) \geq l/2 \Leftrightarrow m([0, l]) \geq l/2, 0 \leq l \leq \sqrt{2}.$$

引理 1 的证明 由引理 2, 只需证 $m([0, l]) \geq l/2, 0 \leq l \leq \sqrt{2}$. 当 $n = 0$, 构造函数

$$m_1(l) = \begin{cases} l, & l \in [0, \sqrt{2}/5] \\ \sqrt{2}/5, & l \in (\sqrt{2}/5, 2\sqrt{2}/5) \\ \sqrt{2}/5 + 3(l - 2\sqrt{2}/5), & l \in [2\sqrt{2}/5, 3\sqrt{2}/5] \\ 4\sqrt{2}/5, & l \in (3\sqrt{2}/5, 4\sqrt{2}/5) \\ 4\sqrt{2}/5 + (l - 4\sqrt{2}/5), & l \in [4\sqrt{2}/5, \sqrt{2}] \\ m_1(5l)/5, & l \in [0, \sqrt{2}/5] \\ \sqrt{2}/5, & l \in (\sqrt{2}/5, 2\sqrt{2}/5) \\ \sqrt{2}/5 + 3m_1[5(l - 2\sqrt{2}/5)]/5, & l \in [2\sqrt{2}/5, 3\sqrt{2}/5] \\ 4\sqrt{2}/5, & l \in (3\sqrt{2}/5, 4\sqrt{2}/5) \\ 4\sqrt{2}/5 + m_1[5(l - 4\sqrt{2}/5)]/5, & l \in [4\sqrt{2}/5, \sqrt{2}] \end{cases}$$

.....

$$m_k(l) = \begin{cases} m_{k-1}(5l)/5, & l \in [0, \sqrt{2}/5] \\ \sqrt{2}/5, & l \in (\sqrt{2}/5, 2\sqrt{2}/5) \\ \sqrt{2}/5 + 3m_{k-1}[5(l - 2\sqrt{2}/5)]/5, & l \in [2\sqrt{2}/5, 3\sqrt{2}/5] \\ 4\sqrt{2}/5, & l \in (3\sqrt{2}/5, 4\sqrt{2}/5) \\ 4\sqrt{2}/5 + m_{k-1}[5(l - 4\sqrt{2}/5)]/5, & l \in [4\sqrt{2}/5, \sqrt{2}] \end{cases}$$

.....

由 m 的定义, $\{m_k(l)\}$ 在 $l \in [0, \sqrt{2}]$ 一致收敛于 $m(l)$. 易见 $m_1(l) \geq l/2$, $l \in [0, \sqrt{2}]$, 由归纳法易证 $\forall k \in N$, $m_k(l) \geq l/2$, 于是, $m(l) \geq l/2$, $l \in [0, \sqrt{2}]$. 对 $n \geq 1$ 的情形, 仿照上面构造 $m_k(l)$ ($k \geq 1$), 同理可证 $m(l) \geq l/2$, $l \in [0, \sqrt{2}]$, 引理 1 得证.

定理 1 的证明 结合图形特点易见这类 $4n + 5$ ($n \geq 0$) 型 *Sierpinski* 地毯满足平衡分布条件, 再由引理 1 结合引理 A 知 $H(S) = \sqrt{2}$.

定理 2 的证明 按与定理 1 相同的证明方法可证其满足基本条件, 且易看出满足平衡分布, 由引理 A 知 $H(S) = \sqrt{2}$.

定理 3 的证明 首先易见此二地毯满足平衡分布条件, 与定理 1 类似可证满足基本条件, 由引理 A 知 $H(S) = \sqrt{2}$. 这样的例子可以举很多.

致谢 感谢周作领教授的指导.

参考文献:

- [1] 周作领, 吴敏. 一个 *Sierpinski* 地毯的 Hausdorff 测度 J . 中国科学(A), 1999, 29(2): 138 ~ 144.
- [2] 马东魁. 一类 *Sierpinski* 地毯的 Hausdorff 测度 J . 中山大学学报(自然科学版), 2000, 39(1): 1 ~ 4.
- [3] FALCONER K. *Fractal geometry-mathematical foundations and applications* [M]. New York: John Willey and Sons, 1990. 55.

The Hausdorff Measures of a Class of Sierpinski Carpets That Satisfy Balanced Distribution

MA Dong-kui^{*}, JIA Bao-guo

Abstract: A class of Sierpinski carpets that satisfy balanced distribution and basic condition is studied. The so-called basic condition is tested by constructing functions and then the exact values of Hausdorff measures of these Sierpinski carpets are given.

Keywords: fractal; Hausdorff measure; Sierpinski carpet; balanced distribution; basic condition

^{*} Department of Scientific Computing and Computer Applications, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China