

文章编号: 0529-6579 (2000) 04-0031-04

# 一类具有随机反射边界的随机微分方程(I) \*

丁灯<sup>1</sup>, 郑小任<sup>2</sup>

(1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275; 2. 澳门大学科技学院, 澳门 P. O. Box 3001)

**摘要:** 在一般的条件下, 得到一类具有反射边界的随机微分方程解的存在性和唯一性结果, 该类方程的反射边界是随机的而且是随时间而变化的, 并讨论了该解的连续性估计问题.

**关键词:** 随机微分方程; 反射边界

**中图分类号:** O211.63 **文献标识码:** A

## 1 具有随机反射边界的随机微分方程

具有反射边界的随机微分方程是一类在偏微分方程理论、最优控制理论等领域具有广泛应用的随机微分方程<sup>[1,2]</sup>. 本文讨论一类实值反射边界随机微分方程, 其反射边界是随机的而且是随时间而变化的. 证明这一类方程的解的存在唯一性, 并讨论了该解的连续性估计问题.

设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一完备的概率空间, 而  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  是其上一满足通常条件的参考族. 在本文中总假设  $W = \{W_t; t \geq 0\}$  是一个标准  $(\mathcal{F}_t)$ -Wiener 过程. 还假设边界过程  $S = \{S_t; t \geq 0\}$  是连续的  $(\mathcal{F}_t)$ -适应随机过程, 而且满足条件:  $E[S_0^2] < \infty$ . 考虑如下的随机微分方程

$$dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, W)dW_t + dK_t \quad (1)$$

这里,  $b(t, x)$  和  $\sigma(t, x)$  是定义在  $[0, +\infty) \times \mathbf{R}$  上的 Borel 可测函数.

**定义 1** 一对随机过程  $(X, K) = \{(X_t, K_t); t \geq 0\}$  称为具有随机反射边界  $S$  的随机微分方程(1)关于初值为  $X_0 = x_0 \geq S_0$  的解, 如果它们满足如下的条件:

1)  $X$  是一连续的  $(\mathcal{F}_t)$ -适应过程,  $K$  是一连续的  $(\mathcal{F}_t)$ -适应增过程, 满足随机积分方程

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + K_t \quad (2)$$

2)  $X$  和  $K$  满足边界条件: 对任意的时刻  $t \geq 0$ ,  $X_t \geq S_t$  和

$$K_t = \int_0^t I_{\{X_s = S_s\}}(s) dK_s \quad (3)$$

下面, 首先在一般的条件(线性增长条件和李氏连续条件)下, 应用经典的概率分析方法证明具有随机反射边界  $S$  的随机微分方程(1)存在唯一的解(定理 1). 进而, 在较强的边界条件和有界性条件下, 得到关于其解的一个连续性估计(定理 2).

\* 收稿日期: 1999-07-13; 作者简介: 丁灯(1959~), 男, 讲师, 兼任澳门大学助理教授.

## 2 解的存在唯一性

假设  $y(t)$  和  $\gamma(t)$  是  $[0, +\infty)$  上 2 个任意实值连续函数且满足:  $y(0) \geq \gamma(0)$ . 据经典的 Skorohod 引理<sup>[3]</sup>, 有如下的引理 1.

引理 1 唯一地存在一个关于沿活动边界  $\gamma(t)$  反射连续函数  $y(t)$  的 Skorohod 问题的解  $(x(t), \zeta(t))$ , 即  $(x(t), \zeta(t))$  是一对满足如下性质的连续函数:

1) 对任意的时刻  $t \geq 0$ ,  $x(t) = y(t) + \zeta(t)$ ; 2)  $\zeta(t)$  是一增函数, 且  $\zeta(0) = 0$ ; 3) 对任意的时刻  $t \geq 0$ ,  $x(t) \geq \gamma(t)$ , 且  $\zeta(t) = \int_0^t I_{\{x(s) = \gamma(s)\}}(s) d\zeta(s)$

下面假设  $Y^{(i)} = \{Y_t^{(i)}; t \geq 0\}$ ,  $(i = 1, 2)$  是如下所定义的扩散过程:

$$Y^{(i)} = x_0 + \int_0^t b_i(s) ds + \int_0^t \sigma_i(s) dW_s$$

这里,  $\{b_i(t); t \geq 0\}$  和  $\{\sigma_i(t); t \geq 0\}$ ,  $i = 1, 2$ , 分别是  $L^1$ -可积和  $L^2$ -可积的  $(\mathcal{F}_t)$ -适应过程. 对任意的  $\omega \in \Omega$ ,  $Y_t^{(i)}(\omega)$ ,  $i = 1, 2$ , 均是关于  $t \in [0, +\infty)$  的连续函数. 根据引理 1, 存在 2 对连续的  $(\mathcal{F}_t)$ -适应随机过程  $(X^{(i)}, K^{(i)})$ ,  $i = 1, 2$ , 使得  $(X_t^{(i)}(\omega), K_t^{(i)}(\omega))$  分别是关于沿活动边界  $S_t(\omega)$  反射  $Y_t^{(i)}(\omega)$  的 Skorohod 问题的解.

引理 2 对任意固定的时刻  $T \geq 0$ , 存在常数  $C_{0,T} > 0$  使得下面的估计式成立

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(1)} - X_t^{(2)}|^2 \right] + \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |K_t^{(1)} - K_t^{(2)}|^2 \right] \leq \\ & C_{0,T} \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T |b_1(s) - b_2(s)| ds \right)^2 + \int_0^T (\sigma_1(s) - \sigma_2(s))^2 ds \right] \end{aligned} \quad (4)$$

证明 由已知条件, 有:  $X_t^{(i)} = x_0 + \int_0^t b_i(s) ds + \int_0^t \sigma_i(s) dW_s + K_t^i$ ,  $i = 1, 2$

应用 Ito 公式, 可得

$$(X_t^{(1)} - X_t^{(2)})^2 = 2 \int_0^t (X_s^{(1)} - X_s^{(2)}) d(X_s^{(1)} - X_s^{(2)}) + \int_0^t (\sigma_1(s) - \sigma_2(s))^2 ds \quad (5)$$

这里  $2 \int_0^t (X_s^{(1)} - X_s^{(2)}) d(X_s^{(1)} - X_s^{(2)}) = 2 \int_0^t (X_s^{(1)} - X_s^{(2)}) (b_2(s) - b_1(s)) ds +$   
 $2 \int_0^t (X_s^{(1)} - X_s^{(2)}) (\sigma_1(s) - \sigma_2(s)) dW_s + 2 \int_0^t (X_s^{(1)} - X_s^{(2)}) d(K_s^{(1)} - K_s^{(2)})$

而由引理 1 中性质 2) 和 3), 有:  $\int_0^t (X_s^{(1)} - X_s^{(2)}) d(K_s^{(1)} - K_s^{(2)}) =$   
 $\int_0^t (X_s^{(1)} - S_s + S_s - X_s^{(2)}) d(K_s^{(1)} - K_s^{(2)}) = - \int_0^t (X_s^{(1)} - S_s) dK_s^{(2)} - \int_0^t (X_s^{(2)} - S_s) dK_s^{(1)} \leq 0$

在式 (5) 中应用 Kurkholder-Davis-Gundy 不等式<sup>[3]</sup> 和 Holder 不等式可得, 有常数  $C'$  使  
 $\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(1)} - X_t^{(2)}|^2 \right] \leq C' \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T |b_1(s) - b_2(s)| ds \right)^2 + \int_0^T (\sigma_1(s) - \sigma_2(s))^2 ds \right].$

于是由上式和关系式:  $K_t^1 - K_t^2 = (X_t^1 - X_t^2) - (Y_t^1 - Y_t^2)$ , 易得 (4) 式. 证毕.

现在, 考虑具有随机反射边界  $S$  的随机微分方程 (1). 假设随机反射边界  $S$  满足如下的条件: (S.1) 存在一个  $(\mathcal{F}_t)$ -适应随机过程  $\{U_t; t \geq 0\}$  满足  $\mathbb{E} \left[ \int_0^t U_s^2 ds \right] < \infty, \forall t > 0$ , 且使得,  $S_t = \int_0^t U_s ds + S_0, \forall t > 0$ .

定理 1 在假设 (S.1) 下, 如果方程 (1) 中的系数  $b(t, x)$  和  $\sigma(t, x)$  满足条件:

1) 对任意的  $T > 0$ , 存在常数  $M_T > 0$  使得对任意的时刻  $0 \leq t \leq T$  和实数  $x$

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq M_T(1 + |x|);$$

2) 对任意的  $T > 0$ , 存在常数  $L_T > 0$  使得对任意的时刻  $0 \leq t \leq T$  和实数  $x, y$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L_T |x - y|.$$

则对任意的  $x_0 \geq S_0$ ,  $P$ -a. s., 具有随机反射边界  $S$  的随机微分方程(1)唯一地存在关于初值为  $X_0 = x_0$  的解  $(X, K)$ .

证明 应用李氏连续条件 2) 和引理 2 马上可证得唯一性. 现往证存在性. 令  $X_t^{(0)} \equiv x_0$ ,  $K_t^{(0)} \equiv 0$ , 和对任意的  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 定义  $(X^{(n)}(\omega), K^{(n)}(\omega))$  为沿活动边界  $S(\omega)$  反射

$$Y_t^{(n)}(\omega) = x_0 + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)}(\omega)) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}(\omega)) dW_s(\omega)$$

的 Skorohod 问题的解. 应用引理 2 和李氏条件 2), 可得: 存在常数  $C_0 > 0$  使得

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2] \leq C_0 \int_0^T E[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2] ds$$

$$\text{和 } E[\sup_{0 \leq t \leq T} |K_t^{(n+1)} - K_t^{(n)}|^2] \leq C_0 \int_0^T E[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2] ds$$

于是, 应用 Borel-Cantelli 引理和经典的概率分析方法<sup>[3]</sup>, 可证明  $(X_t^{(n)}, K_t^{(n)})$  在区间  $[0, T]$  上一致收敛至一对连续的  $(\mathcal{F}_t)$ -适应过程  $(X_t, K_t)$ . 还可证  $(X_t, K_t)$  满足积分方程(2).

下面验证  $(X_t, K_t)$  还满足定义 1 中 2). 显然:  $X_t \geq S_t, 0 \leq t \leq T$ . 现分别对  $(X_t^{(n)} - S_t)$  和  $(X_t - S_t)$  应用 Ito 公式, 并注意到  $\int_0^t (X_s^{(n)} - S_s) dK_s^n = 0$ , 可得

$$(X_t^{(n)} - S_t)^2 = (x_0 - S_0)^2 + \int_0^t 2(X_s^{(n)} - S_s) b(s, X_s^{(n-1)}) ds + \int_0^t 2(X_s^{(n)} - S_s) \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW_s + \int_0^t (\sigma(s, X_s^{(n-1)}))^2 ds - \int_0^t 2(X_s^{(n)} - S_s) dS_s$$

$$\text{和 } (X_t - S_t)^2 = (x_0 - S_0)^2 + \int_0^t 2(X_s - S_s) b(s, X_s) ds + \int_0^t 2(X_s - S_s) \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t 2(X_s - S_s) dK_s - \int_0^t 2(X_s - S_s) dS_s + \int_0^t (\sigma(s, X_s))^2 ds$$

在上式中令  $n \rightarrow \infty$ , 并比较二式可得  $\int_0^t (X_s - S_s) dK_s = 0$ .

最后, 注意到时刻  $T > 0$  的任意性及解的唯一性, 可知定理得证. 证毕.

下面为得到方程(1)解  $(X, K)$  的连续性估计, 假设随机反射边界  $S$  满足 (S.1) 及条件: (S.2) 随机过程  $U$  有界, 即存在常数  $M_U > 0$  使得对任意  $\omega \in \Omega$  和  $t \geq 0$ ,  $|U_t(\omega)| \leq M_U$ .

定理 2 在定理 1 的条件及假设 (S.2) 下, 如果方程(1)的系数满足有界性条件, 即存在  $M_C > 0$  使得对任意  $t \geq 0$  和  $x$ ,  $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq M_C$ , 则方程(1)关于随机反射边界  $S$  和初值为  $X_0 = x_0$  的解  $(X, K)$  满足如下的性质: 对于任意固定的时刻  $T > 0$ , 存在正的常数  $C_{1,T}$  使得下面的估计式成立

$$E[|X_t - X_s|^2] + E[|K_t - K_s|^2] \leq C_{1,T} |t - s|, \quad 0 \leq s < t \leq T \quad (6)$$

证明 应用 Ito 公式有

$$(X_t - X_s)^2 = \int_s^t 2(X_u - X_s) b(u, X_u) du + \int_s^t 2(X_u - X_s) \sigma(u, X_u) dW_u +$$

$$\int_s^t 2(X_u - X_s) dK_u + \int_s^t \sigma(u, X_u)^2 du$$

但注意到由定义 1 中的 2), 可得  $\int_s^t (X_u - X_s) dK_u = \int_s^t (X_u - S_u) dK_u + \int_s^t (S_u - S_s) dK_u + (S_s - X_s) \int_s^t dK_u \leq \int_s^t (S_u - S_s) dK_u$

于是  $E[|X_t - X_s|^2] \leq$

$$2E\left[\int_s^t (X_u - X_s)b(u, X_u) du\right] + 2E\left[\int_s^t (S_u - S_s) dK_u\right] + E\left[\int_s^t (\sigma(u, X_u))^2 du\right] \quad (7)$$

现在, 由定理中的条件和 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$E\left[\int_s^t (X_u - X_s)b(u, X_u) du\right] \leq M_C(t-s)^{1/2} \left[ \int_s^t E[|X_u - X_s|^2] du \right]^{1/2} \leq 2M_C^2(t-s) + 2 \int_s^t E[|X_u - X_s|^2] du$$

$$\text{和} \quad E\left[\int_s^t (\sigma(u, X_u))^2 du\right] \leq M_C^2(t-s)$$

而由 Riemann-Stieltjes 积分的性质和条件 (S 2) 有

$$E\left[\int_s^t (S_u - S_s) dK_u\right] \leq E\left[\sup_{0 \leq u \leq t} |S_u - S_s| \circ V_s(K_u)\right] \leq E\left[\int_s^t |U_u| du \circ K_T\right] \leq M_U(E[K_T^2])^{1/2}(t-s)$$

因此, 由不等式(7) 可得: 存在正的常数  $c_1$  和  $c_2$  使得

$$E[|X_t - X_s|^2] \leq c_1(t-s) + c_2 \int_s^t E[|X_u - X_s|^2] du$$

于是, 应用 Gronwall 不等式, 可得: 存在正的常数  $c_0$  使得  $E[|X_t - X_s|^2] \leq c_0(t-s)$ , 最后, 由方程 (2) 可得关于过程  $K$  的同样估计式. 证毕.

参考文献:

- [1] 丁灯. 关于拟线性混合型边界问题的概率表示 [J]. 应用数学和力学, 1997, 18 (9): 799~806.
- [2] FREIDLIN M. Functional integration and partial differential equations [M]. New Jersey: Princeton University Press, 1985.
- [3] KARATZAS I, SHREVE S E. Brownian motion and Stochastic calculus [M]. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 1991.

## Stochastic Differential Equations with a Stochastic Reflecting Boundary (I)

DING Deng<sup>\*</sup>, ZHENG Shao-ren (Chiang Sio Iam)

**Abstract:** Under general assumptions, the existence and uniqueness of solutions of one class of stochastic differential equations, which has a stochastic and moving reflecting boundary, is proved. A continuous estimation for such solution is obtained.

**Keywords:** stochastic differential equations; reflecting boundary

<sup>\*</sup> Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China