

文章编号: 0529-6579(2000)04-0023-04

一般矩阵小扰动的特征值近似计算^{*}

刘济科, 彭林欣

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 介绍了几种非自伴随系统矩阵发生小改变时, 求解摄动矩阵特征值的近似方法. 重点讨论了基于广义 Rayleigh 商和迹理论的近似计算方法. 给出了各种方法的误差阶. 通过算例对各种方法的计算精度进行了比较.

关键词: 非自伴随系统; 一般矩阵; 摄动; 复特征值

中图分类号: O175; O322 **文献标识码:** A

对于具有任意阻尼系统, 非保守力作用下的动力系统, 陀螺系统, 气动弹性系统等, 一般都是非自伴随系统, 需要采用复模态理论进行分析. 另一方面, 在结构优化设计中, 非自伴随系统的动力修改是极其费时费力的, 而特征值问题的求解则是其中最关键的也是最费时的步骤之一. 于是, 对一个摄动系统的特征值作出有效的即使是近似的估计, 对节省计算时间及费用是非常有价值的. 因此, 探讨结构修改后的快速重分析技术是非常必要的. Courant 等^[1] 首先研究了一般矩阵的摄动问题. 对特征值的导数计算, 人们也提出了几种计算方法^[2,3]. 本文以 Murthy 等^[4] 的工作为基础, 介绍了几种特征值重分析技术. 通过计算实例, 讨论了各种方法的计算精度, 确定了较精确的近似方法.

1 方法介绍

1.1 基本公式

已知 n 阶特征值问题

$$A_0 u_0 = \lambda_0 u_0 \quad (1)$$

其中, λ_0 、 u_0 分别是特征值和右特征向量, 一般矩阵 A_0 决定于设计参量. 我们需要找到精确有效的近似方法来求矩阵 $A = A_0 + \Delta A$ 的特征值 λ . 矩阵 ΔA 是因设计参量发生有限改变而产生的. 相应于问题(1)的摄动左特征值问题是

$$v^T A = \lambda v^T \quad (2)$$

其中, v 是摄动矩阵的左特征向量.

假设要求的特征值是孤立的, 应用范化条件 $u_j = 1$ (其中 u_j 表示 u 的第 j 个分量, 选择 j

^{*} 基金项目: 香港中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (99M7)

收稿日期: 1999-07-08; 作者简介: 刘济科 (1967~), 男, 副教授.

时常使 u_{ν_j} 的值不很小)和 $\mathbf{v}_0^T \mathbf{u}_0 = 1$. 本文将用下标 0 表示原值, 下标 a 表示近似值, 上标 (k) 表示第 k 个特征向量或特征值.

1.2 基于 Rayleigh 商的近似方法

特征值可用广义 Rayleigh 商表示为

$$\lambda = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{u}}{\mathbf{v}^T \mathbf{u}} \quad (3)$$

1.2.1 使用原特征向量的 Rayleigh 商近似方法(RAL1) 用原右、左特征向量 $\mathbf{u}_0$ 、 $\mathbf{v}_0$ 代替(3)中的 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 即得, 本方法为一阶方法.

$$\lambda_a = \lambda_0 + \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{A} \mathbf{u}_0 \quad (4)$$

1.2.2 使用摄动特征向量的 Rayleigh 商近似方法(RAL3) 用伴随方法进行右、左特征向量的摄动计算, 进而求出相应的近似特征向量. 在伴随方法中, 第 k 个右、左特征向量的摄动量 $\Delta \mathbf{u}$ 和 $\Delta \mathbf{v}$ 由下列式子来近似

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \sum_{j=1}^n e_{kj} \mathbf{u}_0^{(j)}, \quad \Delta \mathbf{v}^{(k)} = \sum_{j=1}^n f_{kj} \mathbf{v}_0^{(j)} \quad (5)$$

$$e_{kj} = \frac{\mathbf{v}_0^{(j)T} \Delta \mathbf{A} \mathbf{u}^{(k)}}{(\lambda_0^{(k)} - \lambda_0^{(j)})}, \quad f_{kj} = \frac{\mathbf{v}_0^{(k)T} \Delta \mathbf{A} \mathbf{u}^{(j)}}{(\lambda_0^{(k)} - \lambda_0^{(j)})}, \quad k \neq j$$

$$e_{kk} = -f_{kk} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n e_{kj} u_{0j}^{(j)} \quad (6)$$

求出 $\Delta \mathbf{u}$ 和 $\Delta \mathbf{v}$ 后, 将 $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}$, $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}$ 代入(3)得

$$\lambda_a = \frac{\mathbf{v}_a^T \mathbf{A} \mathbf{u}_a}{\mathbf{v}_a^T \mathbf{u}_a} \quad (7)$$

本方法为三阶方法.

1.2.3 单步迭代法的 Rayleigh 商近似方法(RAL4) 迭代方法的突出特点是: 即使不知道精确的特征值, 但只要近似特征值比较接近真实值, 便可以用迭代方法求出精确特征向量. 这个特点可以有效地改善虽计算效率高但精度差的近似方法的计算结果.

在这个算法中, 需改善精度的特征值 λ_{a1} 由公式(4)得到(注: 以下若无特别说明, λ_{a1} 都表示由公式(4)得到的近似特征值), 然后使用单步迭代来求得近似特征向量

$$\mathbf{u}_a = (\mathbf{A} - \lambda_{a1} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v}_a = (\mathbf{A}^T - \lambda_{a1} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{v}_0 \quad (8)$$

$\mathbf{u}_a$ 、 $\mathbf{v}_a$ 代入(8)式即得近似特征值. 本方法为五阶方法.

1.3 基于迹理论的近似方法

该近似方法是基于求多项式方程的根的迭代方法. 将这种迭代方法应用于矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式 $p(x)$, 同时使用单步迭代来求近似值.

该法的优点是特征多项式的系数不需全部计算, 这可由下述的迹理论得到说明.

迹理论: 如果 $p(x) \neq 0$ 则

$$f(x) = \frac{p'(x)}{p(x)} = -[\text{Tr}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}^{-1})], \quad p'(x) = dp/dx \quad (9)$$

1.3.1 单步 Newton-Raphson 迭代近似方法(NRT1) 该法是三阶方法. 它利用的是 Newton-Raphson 公式

$$\lambda_a = \lambda_{a1} - \frac{p'(\lambda_{a1})}{p''(\lambda_{a1})} = \lambda_{a1} - \frac{1}{f'(\lambda_{a1})} \quad (10)$$

1.3.2 单步 Laguerre 迭代近似方法 (LIT) Laguerre 迭代经常用于计算特征值, 该法的主要特点是收敛性好. 这里只需一步 Laguerre 迭代^[5]

$$\lambda_u = \lambda_{a1} - \frac{np(\lambda_{a1})}{p'(\lambda_{a1}) \pm \{[(n-1)p'(\lambda_{a1})]^2 - n(n-1)p(\lambda_{a1})p''(\lambda_{a1})\}^{1/2}}$$

(11)

由 $f(x)$ 定义, 得

$$\lambda_u = \lambda_{a1} - \frac{n}{f(\lambda_{a1}) \pm [-(n-1)f^2(\lambda_{a1}) - n(n-1)f'(\lambda_{a1})]^{1/2}}$$

(12)

分母中正负号的选择必须保证分母的绝对值较大. 本方法为五阶方法.

2 算 例

$$A_0 = \begin{bmatrix} 28.5 & 30 & 21 & 19 & 27 \\ 28 & 35 & 36 & 17 & 15 \\ 14 & 10 & 7 & 3 & 8 \\ 9 & 16 & 26 & 25 & 23 \\ 18 & 17.5 & 6 & 4 & 8.5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 & 2.5 & -0.7 & -0.9 \\ -2 & 2.1 & -1.1 & -0.8 & -0.5 \\ -0.6 & -1.6 & 1.7 & 0.7 & 2 \\ 1.5 & 1.2 & -0.6 & -1.4 & 1.6 \\ 0.7 & 1.9 & 1.8 & -2.5 & 0.7 \end{bmatrix}$$

各种方法的计算结果见表 1.

表 1 特征值计算结果及精度¹⁾
Tah 1 Results of eigenvalues and their accuracy

	$\lambda_{\text{精确}}$	λ_{RAL1}	λ_{RAL3}	λ_{RAL4}	λ_{NRT1}	λ_{LIT}
λ_1	95.9418	95.9732 [0.033%]	95.9408 [0.001%]	95.9408 [0.001%]	95.9408 [0.001%]	95.9408 [0.001%]
λ_2	6.70487- 4.1261i	6.53568- 5.1626i [13.340%]	6.92926- 3.2486i [11.505%]	6.72269- 4.0716i [0.728%]	6.50472- 4.1097i [2.551%]	6.72617- 4.1545i [0.451%]
λ_3	6.70487+ 4.1261i	6.53568+ 5.1626i [13.340%]	6.64684+ 3.0365i [13.860%]	6.72269+ 4.0716i [0.728%]	6.50472+ 4.1097i [2.551%]	6.72617+ 4.1545i [0.451%]
λ_4	3.624736- 7.9647i	3.77773- 7.9185i [1.826%]	3.91374- 7.6348i [5.012%]	3.62453- 7.9640i [0.008%]	3.61695- 7.9599i [0.105%]	3.62477- 7.9647i [0.004%]
λ_5	3.624736+ 7.9647i	3.77773+ 7.9185i [1.826%]	3.90152+ 7.6439i [4.842%]	3.62453+ 7.9640i [0.008%]	3.61695+ 7.9599i [0.105%]	3.62476+ 7.9647i [0.003%]

1) 表中 $\lambda_{\text{精确}}$ 表示特征值 λ 的精确值(由 QR 方法计算), λ_{RAL1} 表示由 RAL1 方法求得的近似值等. 中括号内为相应的相对误差, 其定义参见文[6].

3 结 论

作为一阶方法, RAL1 近似方法无疑有着最高的效率. 这一点从它的公式中不难看出来: 它只需进行一次向量与矩阵的乘法和一次向量与向量的乘法就可得出特征值的近似值. 不过, 在计算机硬件高速发展的今天, 一般中等配置的个人电脑已相当于过去的小型机, 存储

量更大, 速度更快. 因此, 在选择最好的近似方法时只考虑效率意义不是特别明显. 各种方法的计算精度才是优先考虑的. 一般地说, 越高阶的方法精度越高. 本文所介绍的 5 种方法中有 2 个五阶方法—RAI4 与 LIT 方法. 算例中它们的相对误差都是几种方法中最小的, 这从表一中可以清楚地看出, 也即它们有着最高的精度. 其中, LIT 近似方法的相对误差是最小的, RAI4 近似方法的精度与 LIT 方法相比相差不大. 因此 2 种方法都是求非自伴随系统重分析的近似特征值的最好选择. 当然, 本文只考虑了孤立特征值情况, 对于重根情况, 可参考刘济科^[6]、陈塑寰^[7]等人的工作.

参考文献:

- [1] COURANT R, HILBERT D. Methods of mathematical physics[M]. New York: Interscience, 1953. 343~348.
- [2] ROGERS L C. Derivatives of eigenvalues and eigenvectors[J]. AIAA J, 1970, 8(5): 943~944.
- [3] MURTHY D V, HAFTKA R T. Derivatives of eigenvalues and eigenvectors of a general complex matrix[J]. Int J Numerical Methods in Engineering, 1988, 26(2): 293~311.
- [4] MURTHY D V, HAFTKA R T. Approximations to eigenvalues of modified general matrices[J]. AIAA Paper, 1987: 1032~1045.
- [5] WILKINSON J H. The algebraic eigenvalue problem[M]. Oxford: Clarendon Press, 1965. 461~463.
- [6] LIU J K. Perturbation technique for non-self-adjoint system with repeated eigenvalues[J]. AIAA J, 1999, 37(2): 222~226.
- [7] 陈塑寰. 结构振动分析中的矩阵摄动理论[M]. 重庆: 重庆出版社, 1991. 61~64.

Approximations to Eigenvalues of Perturbed General Matrix

*
LIU Ji-ke, PENG Lin-xin

Abstract: It describes several approximation methods that can be applied to compute the eigenvalues of the perturbed matrices. Approximations based on the generalized Rayleigh quotient and the trace theorem are presented. The error order and accuracy of these methods are analyzed. An illustrative example is given to verify the theoretical analysis.

Keywords: non-self-adjoint system; general matrix; perturbation; complex eigenvalues

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China