

文章编号: 0529-6579 (2000) 04-0019-04

四元数矩阵变元的带状多项式及其性质^{*}

李绍明¹, 滕成业¹, 王 琪²

(1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275; 2. 中山大学理论部)

摘 要: 把实矩阵变元的带状多项式推广到四元数矩阵变元的情形, 给出其相应的一些性质, 这些性质在四元数多元统计分析中, 已经成为推导非中心分布的必需的工具.

关键词: 四元数; 四元数矩阵的共轭类 (轨道); 四元数矩阵的带状多项式

中图分类号: O212 2 4 **文献标识码:** A

在经典多元统计分析中, 许多非中心分布的推导都要涉及到在正交矩阵群或在 Stiefel 流形上的积分. 在求积分的过程中, 经常要用到矩阵变元的带状多项式 (zonal polynomials), 它具有许多优良性质, 已经成为研究非中心分布的必经之路.

实矩阵变元的带状多项式, 是矩阵的特征值的齐次对称多项式. 关于它的理论, 开始由 James^[1] 利用一般线性群的表示理论建立起来. Divis^[2] 和 Chikuse^[3] 进一步发展了不变多项式理论. Farrell^[4] 把矩阵变元的带状多项式推广到复矩阵变元的情形.

1975 年, Anderson^[5] 首先研究了四元数正态模型, 涉及到四元数正态分布及协方差的极大似然估计. 1997 年, Teng^[6] 通过建立四元数与实矩阵的同构, 直接用实分析的方法研究四元数正态分布, 得到了四元数正态分布及其协方差的极大似然估计, 并且通过特征函数反演得到了四元数 Wishart 分布的密度函数. 1999 年, 滕成业等^[7] 讨论了四元数矩阵的外微分式, 得出四元数矩阵变换下有关 Jacobi 行列式的一些结果, 并且给出了四元数上 Stiefel 流形的体积. 这些结果, 对导出各种精确分布起到重要作用.

为进一步研究四元数非中心分布的需要, 本文把实矩阵变元的带状多项式推广到四元数矩阵变元的情形.

1 带状多项式定义的推广

定义 1 (共轭类, 轨道): 设 m 阶实对角方阵 $Y = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_m)$, 定义: 集合 $[Y] = \{X \mid \text{存在 } m \text{ 阶四元数可逆方阵 } P, \text{ 使 } PXP^{-1} = Y\}$ 称为 m 阶实对角方阵 Y 的共轭类. 若 2 个方阵同属一个共轭类, 称它们在同一轨道上.

定义 2 (四元数方阵的带状多项式) 对任一 m 阶四元数方阵 X , 若有 m 阶实对角方

^{*} 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (980287); 中山大学高等学术研究中心基金 (98M)

收稿日期: 1999-10-15; 作者简介: 李绍明 (1965 ~), 男, 副教授.

阵 $Y = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_m)$ 与 X 在同一轨道上, 令 $\kappa = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ 为 k 的不超过 m 的划分. 则 m 阶四元数方阵 X 的相应于划分 κ 的带状多项式定义为: $C_\kappa(X) \doteq C_\kappa(Y)$, 此处, $C_\kappa(Y)$ 为一般实方阵下的带状多项式^[8].

该定义不仅囊括了现有对称实方阵, Hermitian 对称复方阵的定义, 而且, 把带状多项式的定义推广到非对称实方阵, 非 Hermitian 对称复方阵的情况, 并进一步拓展到四元数方阵的情况.

2 四元数方阵的带状多项式的性质

性质 1 对 m 阶四元数方阵 X , 若有 m 阶实对角方阵 $Y = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_m)$ 与 X 在同一轨道上, 令 $\kappa = (k_1, \dots, k_m)$ 为 k 的不超过 m 的划分. 则有: $(\text{Re tr} X)^k = \sum_{\kappa} C_\kappa(X)$

证明 因 X 与 Y 在同一轨道上, 故存在可逆方阵 P , 使 $PXP^{-1} = Y$, $\text{Re tr}(X) = \text{Re tr}(P^{-1}YP) = \text{tr}(Y)$; 另一方面, 由四元数带状多项式的定义可知: $\sum_{\kappa} C_\kappa(X) = \sum_{\kappa} C_\kappa(Y)$, 由实方阵的四元数带状多项式的定义有: $\sum_{\kappa} C_\kappa(Y) = (\text{tr} Y)^k$, 由此可得结论.

性质 2 X, Y 皆为 Hermitian 对称可逆四元数方阵, 且 X 为正定的, 则有

$$C_\kappa(XY) = C_\kappa(X^{1/2} Y X^{1/2})$$

性质 3 A, B 皆为 Hermitian 可逆的 m 阶四元数方阵, 且 A 为 Hermitian 正定的, 则存在实的对角方阵 Λ_1, Λ_2 , 及酉正交方阵 U_1, U_2 , 使得, $A = U_1^* \Lambda_1 U_1, B = U_2^* \Lambda_2 U_2$ 并有:

$$(1) \int_{H \in O(m)} \{\text{Re tr}(AH^*BH)\}^k (dH) = \sum_{\kappa} \frac{C_\kappa(A)C_\kappa(B)}{C_\kappa(I_m)}$$

$$(2) \sum_{\kappa} \int_{qO(m)} C_\kappa(\text{Re}(U\Lambda_1 U^*)) (dU) = \sum_{\kappa} C_\kappa(\Lambda_1) = [\text{tr}(\Lambda_1)]^k$$

$$\text{证明} \int_{qO(m)} \{\text{Re tr}(AH^*BH)\}^k (dH) = \int_{qO(m)} \{\text{Re tr}(\Lambda_1 H^* \Lambda_2 H)\}^k (dH)$$

上式右端在 m 阶实正交群 $O(m)$ 上积分, 有

$$\int_{H_1 \in O(m)} \int_{qO(m)} \{\text{Re tr}(H_1 H \Lambda_1 H' H_1 H_1' \Lambda_2 H_1)\}^k (dH) (dH_1)$$

作变量替换: $U = H_1' H, (dU) = (dH)$, 上式变为

$$\int_{qO(m)} \int_{H_1 \in O(m)} \sum_{\kappa} C_\kappa\{\text{Re}((U\Lambda_1 U^*)H_1 \Lambda_2 H_1)\} (dH_1) (dU) \\ \stackrel{\text{文}[\text{8 Th7.2.5}]}{=} \sum_{\kappa} \int_{qO(m)} C_\kappa(\text{Re}(U\Lambda_1 U^*)) (dU) \frac{C_\kappa(\Lambda_2)}{C_\kappa(I_m)}$$

令 $B = I_m$ 可得

$$\sum_{\kappa} \int_{qO(m)} C_\kappa(\text{Re}(U\Lambda_1 U^*)) (dU) = \sum_{\kappa} C_\kappa(\Lambda_1) = [\text{tr} \lambda_1]^k,$$

由此进一步定理可证.

性质 4 设为 X_1 实正定矩阵, X_2 为共轭对称的四元数矩阵, 则有

$$\int_{qO(m)} C_\kappa(\text{Re}(X_1 H X_2 H^*)) (dH) = \frac{C_\kappa(X_1) C_\kappa(X_2)}{C_\kappa(I_m)}$$

$$\text{证明} \quad \text{上式左边} = \int_{O(m)} \int_{Q(m)} C_{\kappa}(X_1 H_1 \operatorname{Re}(H_1' H X_2 H^* H_1 H_1')) (dH)(dH_1)$$

作替换: $U = H_1' H$, $(dU) = (dH)$, 代入上式右端得

$$\text{右端} = \int_{O(m)} \int_{Q(m)} C_{\kappa}(X_1 H_1 \operatorname{Re}(U X_2 U^*) H_1^*) (dU)(dH_1)$$

交换积分次序, 由文[8] Th 7.2.5 可得

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \int_{Q(m)} \frac{C_{\kappa}(X_1) C_{\kappa}(\operatorname{Re}(U X_2 U^*))}{C_{\kappa}(I_m)} (dU) = \\ &C_{\kappa}(X_1) \int_{Q(m)} \frac{C_{\kappa}(\operatorname{Re}(U X_2 U^*))}{C_{\kappa}(I_m)} (dU) = C_{\kappa}(X_1) \frac{C_{\kappa}(X_2)}{C_{\kappa}(I_m)}, \text{证毕.} \end{aligned}$$

性质 5 若 X 为 $m \times n$ 四元数矩阵, $n \geq m$, 且 $H = [H_1; H_2] \in {}_q O(n)$, H_1 为 $n \times m$ 四元数列酉正交矩阵: $H_1^* H_1 = I_m$, 则

$$\int_{H \in {}_q O(m)} \exp\{4\operatorname{Re} \operatorname{tr}(X H_1)\} (dH) = {}_0 F_1 \left[\frac{n}{2}, 4\operatorname{Re}(X X^*) \right]$$

证明 上式左边在实正交矩阵空间 $O(m)$ 上对 m 阶实正交矩阵 K 积分, 可得

$$\begin{aligned} &\int_{K \in O(m)} \int_{H \in {}_q O(n)} \exp\{4\operatorname{Re} \operatorname{tr}(X H_1)\} (dH)(dK) = \\ &\int_{K \in O(m)} \int_{H \in {}_q O(n)} \exp\{4\operatorname{Re} \operatorname{tr}(X H_1 K')\} (dH)(dK) \end{aligned}$$

作变量替换

$$U = H \begin{pmatrix} K' & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} = (H_1 K'; H_2) = (U_1; U_2)$$

由文[7] 定理 1 有: $(dH) = (dU)$, 由此上式变为

$$\int_{K \in O(m)} \int_{U \in {}_q O(n)} \exp\{4\operatorname{Re} \operatorname{tr}(X U_1 K')\} (dU)(dK)$$

交换 K, U 的积分次序,

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \int_{U \in {}_q O(n)} \int_{K \in O(m)} \exp\{4\operatorname{Re} \operatorname{tr}(X U_1 K')\} (dK)(dU) \stackrel{\text{文[8] Th 7.4.1}}{=} \\ &\int_{U \in {}_q O(n)} {}_0 F_1 \left[\frac{n}{2}, 4\operatorname{Re}(X U_1) \operatorname{Re}(X U_1)' \right] (dU) = \\ &\int_{U \in {}_q O(n)} {}_0 F_1 \left[\frac{n}{2}, 4\operatorname{Re}(X X^*) \right] (dU) = {}_0 F_1 \left[\frac{n}{2}, 4\operatorname{Re}(X X^*) \right], \text{证毕.} \end{aligned}$$

3 带状多项式的推广: 多个四元数方阵变元的不变多项式

本文将把多个实方阵变元的不变多项式推广到四元数方阵变元的情形.

定义 3 (共轭类, 轨道) 设 m 阶实方阵序列 $(Y_1, \dots, Y_r)$, 集合 $[Y_1, \dots, Y_r] = \{X_1, \dots, X_r \mid \text{存在 } m \text{ 阶四元数可逆方阵 } P, \text{ 使 } P X_i P^{-1} = Y_i, i = 1, \dots, r\}$ 称为 m 阶实方阵序列 $(Y_1, \dots, Y_r)$ 的共轭类. 若 2 个方阵序列同属一个共轭类, 称它们在同一轨道上.

设 $\kappa, \lambda, \xi, \Phi$ 及 $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ 分别为 $k, j, l, k_1 + \dots + k_r$ 及 $k_1, \dots, k_r$ 的不超过 m 的划分.

定义 4 (多个四元数矩阵变元的不变多项式定义) 设四元数 m 阶方阵 $X_1, \dots, X_r$ 分别与实对角方阵 $Y_1, \dots, Y_r$ 在同一轨道上, 则定义 $X_1, \dots, X_r$ 的不变多项式^[2]: $C_{\Phi, \kappa, \dots, \kappa_r}^{\lambda, \xi}(X_1, \dots,$

$$X_r) = C_{\Phi}^{\kappa_1, \dots, \kappa_r}(Y_1, \dots, Y_r).$$

由定义即有性质 6.

性质 6 设四元数 m 阶方阵 $X_1, \dots, X_r$ 分别与实方阵 $Y_1, \dots, Y_r$ 在同一轨道上, 对任意 m 阶可逆方阵 P , 有

$$C_{\Phi}^{\kappa_1, \dots, \kappa_r}(PX_1P^{-1}, \dots, PX_rP^{-1}) = C_{\Phi}^{\kappa_1, \dots, \kappa_r}(X_1, \dots, X_r) = C_{\Phi}^{\kappa_1, \dots, \kappa_r}(Y_1, \dots, Y_r)$$

性质 7 设 A, B 为四元数 m 阶 Hermitian 方阵, X 为实的四元数 m 阶对称方阵, 则

$$\int_{H \in O(m)} C_k(\operatorname{Re}(HAH^*X)) C_\lambda(\operatorname{Re}(HBH^*X)) (dH) = \sum_{\Phi \in \kappa^* \lambda} \frac{C_{\Phi}^{\kappa^* \lambda}(A, B) C_{\Phi}(X)}{C_{\Phi}(I)}$$

证明 上式左端对 H_1 在实正交群 $O(m)$ 上积分得

$$\int_{H_1 \in O(m)} \int_{H \in O(m)} C_k(\operatorname{Re}(H_1'HAH^*H_1)H_1'XH_1) C_\lambda(\operatorname{Re}(H_1'HBH^*H_1)H_1'XH_1) (dH) (dH_1)$$

作变量替换: $U = H_1'H$, 有: $(dU) = (dH)$, 交换积分序

$$\text{上式} = \int_{H \in O(m)} \int_{U \in O(m)} C_k \operatorname{Re}(U_1AU^*) H_1'XH_1 C_\lambda \operatorname{Re}(UBU^*) H_1'XH_1 (dH_1) (dU)$$

由文[2] p295 式(4.13), 可得:

$$\text{上式} = \int_{U \in O(m)} \sum_{\Phi \in \kappa^* \lambda} \frac{C_{\Phi}^{\kappa^* \lambda}(\operatorname{Re}(UAU^*), \operatorname{Re}(UBU^*)) C_{\Phi}(X)}{C_{\Phi}(I)} (dU)$$

进一步可得定理证明.

参考文献:

- [1] JAMES A T. Zonal polynomials of the real positive definite symmetric [J]. Ann Math, 1961 (74): 456.
- [2] DAVIS A W. Invariant polynomials with two matrix arguments extending the zonal polynomials [A]. KRISHNAI P R. Multivariate analysis— V [C]. New York: Academic Press, 1980. 287~301.
- [3] CHIKUSE Y. Invariant polynomials with matrix arguments and their applications [M]. Multivariate analysis [C]. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1980. 53~68.
- [4] FARRELL R H. Calculation of complex zonal polynomials [A]. KRISHNAI P R. Multivariate analysis— V [C]. New York: Academic Press, 1980. 302~320.
- [5] ANDERSON S. Invariant normal models [J]. Ann Statist, 1975 (3): 132~154.
- [6] THENG C Y, FANG K T. Statistical analysis based on normal distribution of quaternion [A]. Contemporary Multivariate Analysis and Its Application [C]. Hong Kong, 1997. 19~20.
- [7] 滕成业, 李绍明. 四元数矩阵微分及其在精确分布的应用 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 1999, 38 (3): 12~16.
- [8] MUIRHEAD R J. Aspect of multivariate statistical theory [M]. New York: John Wiley & Sons, 1982. 108.

Zonal Polynomials with Quaternion Matrix Arguments and Their Properties

*
LI Shao-ming, TENG Cheng-ye, Wang Qi

Abstract: Zonal polynomials with quaternion matrix arguments are defined and their properties are discussed. The results are crucial in the further study of noncentral distribution of quaternion.

Keywords: quaternion; conjugate classes (orbit) of quaternion matrices; quaternion zonal polynomials