

文章编号: 0529-6579 (2000) 04-0015-04

# 广义 Hirota-Satsuma 耦合 KdV 方程的四孤子解<sup>\*</sup>

范筑军, 伍小明

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

**摘 要:** 首先将耦合 KdV 方程变换为双线性形式, 然后假定它的特殊孤子解的形式, 得到一组方程, 并通过 Mathematica 软件来对它进行符号计算, 求出它的四孤子解. 借助 Matlab 软件还可作出解的图形.

**关键词:** 耦合 KdV 方程; 四孤子解

**中图分类号:** O175.24 **文献标识码:** A

## 1 Hirota 双线性形式和指数型孤子解

Hirota 等<sup>[1]</sup>曾指出耦合 KdV 方程 (cKdV)

$$\begin{cases} u_t = (u_{xxx} - 6uu_x)/2 + 6w_x \\ v_t = -v_{xxx} + 3uv_x \end{cases}$$

并有众多文献研究了它的一系列性质, 如孤子解、Lax 对、Bäcklund 变换和守恒量等. Wu 等<sup>[2]</sup>引入了进一步指出推广的 Hirota-Satsuma coupled Korteweg-de Vries (简记为 gHS-KdV)

$$\begin{cases} u_t = (u_{xxx} - 6uu_x)/2 + 3(vw)_x \\ v_t = -v_{xxx} + 3w_x \\ w_t = -w_{xxx} + uw_x \end{cases} \quad (1)$$

当  $w = v^*$  时, 并且  $w = 1$  时, 方程组(1)化为新的耦合 KdV 方程

$$\begin{cases} u_t = (u_{xxx} - 6uu_x)/2 + 3(|v|^2)_x \\ v_t = -v_{xxx} + 3w_x \end{cases}$$

和另一耦合 KdV 方程

$$\begin{cases} u_t = (u_{xxx} - tuu_x)/2 + 3v_x \\ v_t = -v_{xxx} + 3w_x \end{cases}$$

且引入带有 3 位势的  $4 \times 4$  矩阵特征值问题得到相应的 Lax 对和孤立子方程簇, 证明了它们具有 Hamiltonian 结构和 Miura 变换. Wu 等<sup>[3]</sup>则就用 Hirota 双线性形式求出了孤子方程组的 1, 2, 3 指数型孤子解. 但其方法是手工的, 繁难而易出错.

\* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19771089)

收稿日期: 1999-07-13; 作者简介: 范筑军 (1972-), 男, 博士.

本文利用 Mathematica 软件, 运用计算机符号计算方法, 可以推导出方程 (1) 的 1, 2, 3, 4 孤子解. 此外, 用 Matlab 软件还可给出孤子解的图.

为得到方程 (1) 的孤子解, 首先引入孤立子理论中著名的 Hirato 方法, 令  $u = -2(\log f)_{xx}$ ,  $v = g/f$ ,  $w = h/f$ , 可将它化为双线形算子方程

$$\begin{cases} D_x D_t - D_x^4/2)ff = -3gh \\ (D_t + g_x^3)fg = 0 \\ (D_t + D_x^3)fh = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中, 算子方程  $D_x D_t$  定义为

$$D_x^n D_t^m fg = \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right]^n \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right]^m f(x, t) g(x', t') \Big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}}$$

$$\begin{aligned} \text{定义} \quad & (D_x D_t - D_x^4/2) \exp(n_1 \eta_1 + \dots + n_N \eta_N) \circ \exp(m_1 \eta_1 + \dots + m_N \eta_N) = \\ & F_1(n_1, \dots, n_N, m_1, \dots, m_N) \\ & (D_1 + D_x^3) \exp(n_1 \eta_1 + \dots + n_N \eta_N) \circ \exp(m_1 \eta_1 + \dots + m_N \eta_N) = \\ & F_2(n_1, \dots, n_N, m_1, \dots, m_N) \end{aligned} \quad (3)$$

并假设  $f, g, h$  为指数型  $N$  孤子解

$$\begin{cases} f = 1 + \sum a_{\mu_1, \dots, \mu_N}^{\mu_1, \dots, \mu_N} e^{\mu_1 \eta_1 + \dots + \mu_N \eta_N} & \sum \mu_i = \text{偶} \\ g = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_4} + \sum b_{\mu_1, \dots, \mu_N}^{\mu_1, \dots, \mu_N} e^{\mu_1 \eta_1 + \dots + \mu_N \eta_N} & \sum \mu_i = \text{奇}, \sum \mu_i \geq 3 \\ h = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_4} + \sum c_{\mu_1, \dots, \mu_N}^{\mu_1, \dots, \mu_N} e^{\mu_1 \eta_1 + \dots + \mu_N \eta_N} & \sum \mu_i = \text{奇}, \sum \mu_i \geq 3 \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $u_i = \{0, 1, 2\}$ ,  $\eta_i = k_i^3 t - k_i x + \eta_{i0}$ ,  $k_i$  为参数,  $\eta_{i0}$  为任意常数, (4) 式代入方程 (2) 中展开, 按  $e$  指数的异同可得由系数  $a_{\mu_1, \dots, \mu_N}^{\mu_1, \dots, \mu_N}$ ,  $b_{\mu_1, \dots, \mu_N}^{\mu_1, \dots, \mu_N}$ ,  $c_{\mu_1, \dots, \mu_N}^{\mu_1, \dots, \mu_N}$  组成的带参数  $k_i$  和函数  $F_i(n_1, \dots, n_N, m_1, \dots, m_N)$  的一系列方程. 解此方程组, 其相容解即为方程 (1) 的  $N$  孤子解. 此方程可分为 2 类, 一类为求系数的方程, 另一类为需要证明其相容解(恒等式)的系数方程.

对于  $N = 1$ , 可以得到解  $a_1 = 1/(8 * k_1^4)$ ,  $k_1, b_1, c_1, \eta_{10}$  为任意常数.

对于  $N = 2$ , 可以得到解  $a_{20} = 1/(8 * k_1^4)$ ,  $a_{02} = 1/(8 * k_2^4)$ ,  $a_{11} = 8/((k_1^2 + k_2^2)(k_1 + k_2)^2)$ ,  $a_{22} = (k_1 - k_2)^4/(4 * (k_1^4 + k_2^4)(k_1 + k_2)^4)$ ,  $b_{21} = (k_1 - k_2)^2/(k_1 + k_2)^2$ ,  $b_{12} = (k_1 - k_2)^2/(k_1 + k_2)^2$ ,  $c_{21} = (k_1 - k_2)^2/(k_1 + k_2)^2$ ,  $c_{12} = (k_1 - k_2)^2/(k_1 + k_2)^2$ , 其中,  $k_1, k_2, \eta_{10}, \eta_{20}$  为任意常数.

## 2 偶合 KdV 方程的四孤子解

以上述方程组是用人工判断推导和分类的. 当  $N = 1, 2$  时, 还可以较易算出, 但当  $N > 2$  时, 由于项数很多, 人工计算复杂繁难而易出错. 比如,  $N = 3$  时,  $f$  有 13 个待定的系数,  $g, h$  各有 10 个待定的系数, 而系数恒等公式方程数就更多; 并且确定每一个系数时, 每个方程都有很多项.  $N$  越大, 项就越多, 计算就越困难. 现在 Mathematica 语言符号计算软件, 可通过相应规则分别求出  $N$  孤子解的系数求解公式和系数恒等公式. 并对  $N = 1, 2, 3, 4$  情形用系数求解公式具体求出系数表达式. 本文对系数恒等公式用 Mathematica 证明了由系数求解公式求出的系数确实为恒等式, 从而求出了  $N = 1, 2, 3, 4$

的指数型孤子显式解.

一个偶合 KdV 方程由四孤子解可以由以下给出

$$f = 1 + \sum_{n=1}^4 \sum_{\substack{0 \leq i, j, k, l \leq 2 \\ i+j+k+l=2n}} a[i, j, k, l] \times e^{i\eta_1 + j\eta_2 + k\eta_3 + l\eta_4}$$

$$g = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_4} + \sum_{n=2}^4 \sum_{\substack{0 \leq i, j, k, l \leq 2 \\ i+j+k+l=2n-1}} b[i, j, k, l] \times e^{i\eta_1 + j\eta_2 + k\eta_3 + l\eta_4}$$

$$h = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_4} + \sum_{n=1}^4 \sum_{\substack{0 \leq i, j, k, l \leq 2 \\ i+j+k+l=2n-1}} c[i, j, k, l] \times e^{i\eta_1 + j\eta_2 + k\eta_3 + l\eta_4}$$

其中,  $\eta_j = k_j x - k_j^3 t + \eta_{j0}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $k_j$ ,  $\eta_{j0}$  为任意常数.

根据式(3), 函数  $F_1, F_2$  的定义具体为

$$F_1(n_1, n_2, n_3, n_4, m_1, m_2, m_3, m_4) = -(n_1 k_1 + n_2 k_2 + n_3 k_3 + n_4 k_4 - m_1 k_1 - m_2 k_2 - m_3 k_3 - m_4 k_4) \cdot (n_1 k_1^3 + n_2 k_2^3 + n_3 k_3^3 + n_4 k_4^3 - m_1 k_1^3 - m_2 k_2^3 - m_3 k_3^3 - m_4 k_4^3) - (n_1 k_1 + n_2 k_2 + n_3 k_3 + n_4 k_4 - m_1 k_1 - m_2 k_2 - m_3 k_3 - m_4 k_4)^4 / 2 \quad (6)$$

$$F_2(n_1, n_2, n_3, n_4, m_1, m_2, m_3, m_4) = -(n_1 k_1^3 + n_2 k_2^3 + n_3 k_3^3 + n_4 k_4^3 - m_1 k_1^3 - m_2 k_2^3 - m_3 k_3^3 - m_4 k_4^3) + (n_1 k_1 + n_2 k_2 + n_3 k_3 + n_4 k_4 - m_1 k_1 - m_2 k_2 - m_3 k_3 - m_4 k_4)^3$$

将方程(5)代入方程(2), 展开可以得到它们的系数等式共 936 个. 在它们中的 120 个系数等式中, 可以从 112 个中解出 112 个系数, 其余的等式必须测试为恒等式. 以如下给出了所求出的部分系数, 而恒等式的测试只给出测试等式的系数.

$$a[2, 0, 0, 0] = 1/(8k_1^4); a[0, 2, 0, 0] = 1/(8k_2^4); a[0, 0, 2, 0] = 1/(8k_3^4); a[0, 0, 0, 2] = 1/(8k_4^4);$$

$$a[1, 1, 0, 0] = 2/((k_1 + k_2) 2(k_1^2 + k_2^2)); a[1, 0, 1, 0] = 2/((k_1 + k_3) 2(k_1^2 + k_3^2));$$

$$a[1, 0, 0, 1] = 2/((k_1 + k_4) 2(k_1^2 + k_4^2)); a[0, 1, 1, 0] = 2/((k_2 + k_3) 2(k_2^2 + k_3^2));$$

$$a[0, 1, 0, 1] = 2/((k_4 + k_2) 2(k_4^2 + k_2^2)); a[0, 0, 1, 1] = 2/((k_4 + k_3) 2(k_4^2 + k_3^2)) \dots \dots$$

(以上  $n = 1$ ,  $f$  系数, 共 10 个)

$$a[2, 2, 0, 0] = (k_1 - k_2) 4/(64k_1^4 k_2^4 (k_1 + k_2)^4); a[2, 0, 2, 0] = (k_1 - k_3) 4/(64k_1^4 k_3^4 (k_1 + k_3)^4);$$

$$a[2, 1, 1, 0] = (k_1 - k_2) 2(k_1 - k_3) 2/(4k_1^4 k_2^4 (k_1 + k_2) 2(k_1 + k_3) 2(k_2 + k_3) 2(k_2^2 + k_3^2));$$

$$a[2, 1, 0, 1] = (k_1 - k_2) 2(k_1 - k_4) 2/(4k_1^4 k_2^4 (k_1 + k_2) 2(k_1 + k_4) 2(k_2 + k_4) 2(k_2^2 + k_4^2));$$

$$a[2, 0, 1, 1] = (k_1 - k_4) 2(k_1 - k_3) 2/(4k_1^4 k_2^4 (k_1 + k_4) 2(k_1 + k_3) 2(k_4 + k_3) 2(k_4^2 + k_3^2));$$

$$a[1, 1, 1, 1] = 2(k_2^4 - k_3^4) 2(k_1^4 - k_4^4) 2 + (k_1^4 - k_3^4) 2(k_2^4 - k_4^4) 2 + (k_1^4 - k_2^4) 2(k_3^4 - k_4^4) 2 + (k_2^4 - k_3^4) 2(k_1^4 - k_4^4) 2 + (k_2^4 - k_4^4) 2(k_1^4 - k_3^4) 2 + (k_3^4 - k_4^4) 2(k_1^4 - k_2^4) 2 + (k_1^4 + k_2^4) 2(k_2^4 + k_3^4) 2 + (k_1^4 + k_3^4) 2(k_2^4 + k_4^4) 2 + (k_1^4 + k_4^4) 2(k_2^4 + k_3^4) 2 + (k_2^4 + k_3^4) 2(k_2^4 + k_4^4) 2 + (k_2^4 + k_4^4) 2(k_3^4 + k_4^4) 2 + (k_3^4 + k_4^4) 2(k_2^4 + k_4^4) 2 + \dots \dots$$

(以上  $n = 2$ ,  $f$  系数, 共 19 个)

$$a[2, 2, 2, 0] = (k_1 - k_2) 4(k_1 - k_3) 4(k_2 - k_3) 4/(512k_1^4 k_2^4 k_3^4 (k_1 + k_2) 4(k_1 + k_3) 4(k_2 + k_3) 4)$$

$$a[2, 2, 1, 1] = (k_1 - k_2) 4(k_1 - k_3) 2(k_2 - k_3) 2(k_1 - k_4) 2(k_2 - k_4) 2/(32k_1^4 k_2^4 k_3^4 (k_1 + k_2) 4(k_1 + k_3) 2(k_2 + k_3) 2(k_1 + k_4) 2(k_2 + k_4) 2(k_3 + k_4) 2(k_3^2 + k_4^2))$$

$$a[2, 1, 2, 1] = (k_1 - k_2) 2(k_1 - k_3) 4(k_2 - k_3) 2(k_1 - k_4) 2(k_3 - k_4) 2/(32k_1^4 k_2^4 k_3^4 (k_1 + k_2) 2(k_1 + k_3) 4(k_2 + k_3) 2(k_1 + k_4) 2(k_2 + k_4) 2(k_3 + k_4) 2(k_2^2 + k_4^2)) \dots \dots$$

(以上  $n = 3$ ,  $f$  系数, 共 10 个)

$$a[2, 2, 2, 2] = (k_1 - k_2) 4(k_1 - k_3) 4(k_2 - k_3) 4(k_1 - k_4) 4(k_2 - k_4) 4(k_3 - k_4) 4/(4096k_1^4 k_2^4 k_3^4 k_4^4 (k_1 + k_2) 4(k_1 + k_3) 4(k_2 + k_3) 4(k_1 + k_4) 4(k_2 + k_4) 4(k_3 + k_4) 4) \dots \dots$$

(以上  $n = 4$ ,  $f$  系数, 共 1 个)

$$b[2, 1, 0, 0] = (k_1 - k_2) 2/(8k_1^4 (k_1 + k_2)^2); b[2, 0, 1, 0] = (k_1 - k_3) 2/(8k_1^4 (k_1 + k_3)^2);$$

$$b[2, 0, 0, 1] = (k_1 - k_4) 2/(8k_1^4 (k_1 + k_4)^2); b[1, 2, 0, 0] = (k_1 - k_2) 2/(8k_2^4 (k_1 + k_2)^2);$$

$$b[1, 1, 1, 0] = (k_1^4 - k_2^4) 2 + (k_1^4 - k_4^4) 2 + (k_2^4 - k_4^4) 2/(k_1 + k_2) 2(k_1^2 + k_2^2)(k_1 + k_3) 2(k_1^2 + k_3^2)(k_1 + k_4) 2(k_1^2 + k_4^2)(k_2 + k_3) 2(k_2^2 + k_3^2)(k_2 + k_4) 2(k_2^2 + k_4^2)(k_3 + k_4) 2(k_3^2 + k_4^2) \dots \dots$$

$$k3) 2(k1 2 + k3 2)(k2 + k3) 2(k2 2 + k4 2))$$

$$b[0, 1, 1, 1] = (k4 4 - k2 4) 2 + (k4 4 - k3 4) 2 + (k2 4 - k3 4) 2 / ((k4 + k2) 2(k4 2 + k2 2)(k4 + k3) 2(k4 2 k3 2)(k2 + k3) 2(k2 2 + k3 2)) \dots$$

(以上  $n = 2$ ,  $g$  系数, 共 16 个)

$$b[2, 2, 1, 0] = (k1 - k2) 4(k1 - k3) 2(k2 - k3) 2 / (64k1 4k2 4(k1 + k2) 4(k1 + k3) 2(k2 + k3) 2);$$

$$b[2, 1, 2, 0] = (k1 - k2) 2(k1 - k3) 4(k2 - k3) 2 / (64k1 4k3 4(k1 + k2) 2(k1 + k3) 4(k2 + k3) 2);$$

$$b[0, 2, 1, 2] = (k2 - k3) 2(k2 - k4) 4(k3 - k4) 2 / (64k2 4k4 4(k2 + k3) 2(k2 + k4) 4(k3 + k4) 2);$$

$$b[0, 1, 2, 2] = (k2 - k3) 2(k2 - k4) 4(k3 - k4) 4 / (64k3 4k4 4(k2 + k3) 2(k2 + k4) 2(k3 + k4) 4);$$

$$b[2, 1, 1, 1] = (k1 - k2) 2(k1 - k3) 2(k1 - k4) 2((k2 4 - k3 4) 2 + (k3 4 - k4 4) 2) / (8k1 4(k1 + k2) 2(k1 + k3) 2(k2 + k3) 2(k1 + k4) 2(k2 + k4) 2(k3 + k4) 2(k2 2 + k3 2)(k2 2 + k4 2)(k3 2 + k4 2)) \dots$$

(以上  $n = 3$ ,  $g$  系数, 共 16 个)

$$b[2, 2, 2, 1] = (k1 - k2) 4(k1 - k3) 4(k2 - k3) 4(k1 - k4) 2(k2 - k4) 2(k3 - k4) 2 / (512k1 4k2 4k3 4(k1 + k2) 4(k1 + k3) 4(k2 + k3) 4(k1 + k4) 2(k2 + k4) 2(k3 + k4) 2);$$

$$b[2, 2, 1, 2] = (k1 - k2) 4(k1 - k3) 2(k2 - k3) 2(k1 - k4) 4(k2 - k4) 4(k3 - k4) 2 / (512k1 4k2 4k4 4(k1 + k2) 4(k1 + k3) 2(k2 + k3) 2(k1 + k4) 4(k2 + k4) 4(k3 + k4) 2);$$

$$b[2, 1, 2, 2] = (k1 - k2) 2(k1 - k3) 4(k2 - k3) 2(k1 - k4) 4(k2 - k4) 2(k3 - k4) 4 / (512k1 4k3 4k4 4(k1 + k2) 2(k1 + k3) 4(k2 + k3) 2(k1 + k4) 4(k2 + k4) 2(k3 + k4) 4);$$

$$b[1, 2, 2, 2] = (k1 - k2) 2(k1 - k3) 2(k2 - k3) 4(k1 - k4) 2(k2 - k4) 4(k3 - k4) 4 / (512k2 4k3 4k4 4(k1 + k2) 2(k1 + k3) 2(k2 + k3) 4(k1 + k4) 2(k2 + k4) 4(k3 + k4) 4);$$

(以上  $n = 4$ ,  $g$  系数, 共 4 个)

(关于  $h$  的系数与  $g$  的系数一样, 其个数分别为  $n = 2: 16$ ,  $n = 3: 16$ ,  $n = 4: 4$  共 36 个)

关于测试的等式偶阶 272 个, 奇阶 544 个, 共 816 个, 其中, 4 阶 16 个, 6 阶 58 个, 8 阶 84 个, 10 阶 68 个, 12 阶 35 个, 14 阶 10 个, 16 阶 01 个; 3 阶  $4 * 2$  个, 5 阶  $36 * 2$  个, 7 阶  $76 * 2$  个, 9 阶  $80 * 2$  个, 11 阶  $52 * 2$  个, 13 阶  $20 * 2$  个, 15 阶  $4 * 2$  个。

进一步, 用 MatLab 语言对具体参数值还可画出四孤子图(图略)。

参考文献:

- [1] HIROTA R, SATSUMA J. Phys Lett, 1981, 85(A): 407.
- [2] 施齐焉, 朱思铭. 一类孤子族的 Lax 表示[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1997, 36(5): 1~5.
- [3] 朱思铭, 施齐焉, 张磊. 一族可积晶格孤子方程及其可积辛映射[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1998, 37(6): 1~4

## Four Soliton solution of Generalized Hirota-Satsuma Coupled Korteweg-de Vries

FAN Zhu-jun<sup>\*</sup>, WU Xiao-ming

**Abstract:** The coupled KdV equation is translated into bilinear form. After the form of their soliton solution is given some equations are obtained. It is caculated by the Mathematica software and the four-soliton solution is solved. The graphs of solutions are also suggested.

**Keywords:** coupled KdV equation; four-soliton solution

<sup>\*</sup> Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China