

利用投影的方法求曲面/曲面相交^{*}

关履泰, 逯峰, 杨朝霞

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘要: SSI (surface/ surface intersection) 算法主要有 2 种: 几何分割法和数值追踪法, 但是在曲面/ 曲面求交的实体造型中, 为了保证系统的稳定性和准确性, 需要有一个可靠的, 准确和拓扑一致的求交算法. 该文所提出利用投影的方法来计算曲面/ 曲面相交, 能成功解决上面提出的问题.

关键词: 投影; 相交; Newton-Raphson 方法; SSI

中图分类号: TP391.72 **文献标识码:** A

在曲面与曲面相交问题的以往算法中, 几何分割与数值追踪是比较常用的一些方法. 几何分割可以稳定高效地获取一系列无序的交线段, 但是对它进行排序是一个关键而困难的问题, 因为在非均匀几何分划的过程中会产生裂缝以及求出的交线极不均匀, 虽然也提出方法改进 (如添加额外三角形等)^[1,2], 但都不能令人满意. 而数值追踪的方法往往又忽略了曲面本身的几何特点^[3], 这往往会导致结果的不适定性.

1 利用投影的算法

本文算法可以解决上述问题, 它包含 3 个步骤:

(1) 获取交线上的初始点: 构造封闭盒, 通过封闭盒之间的相交性进行曲面块间的相交测试, 利用角顶点的位置来确定交线的初始点.

(2) 追踪交线: 通过第 (1) 步, 可以得到一系列的初始点, 采用步向量的方法可得下一个点的初始估计, 利用 Newton-Raphson 方法可以迭代到真正相交点.

(3) 排序: 把相交估计适当地连接起来, 形成最终完整的相交曲线的估计.

1.1 获取交线上的追踪初始点

1.1.1 局部坐标与全局坐标 设在 xyz 坐标系中有一点 O , 在 O 处有一个局部坐标系 $O-n$, a, o 且空间中有一点 P , P 点的全局坐标记为 $(P_x, P_y, P_z, 1)$, p 为该点局部坐标系下的坐标, 记为 $p = (p_n, p_o, p_a, 1)$, 则 P 与 p 的关系为: $P = T \circ p$ 或 $p = T^{-1} \circ P$, 其中 $T =$

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & O_x \\ n_y & o_y & a_y & O_y \\ n_z & o_z & a_z & O_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (n_x, n_y, n_z) \text{ 为 } n \text{ 的 3 个分量, } (o_x, o_y, o_z) \text{ 为 } o \text{ 的 3 个分量, } (a_x, a_y, a_z) \text{ 为}$$

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19871095); 广东省自然科学基金资助项目 (9902275); 中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (99M5)

收稿日期: 2000-05-06; 作者简介: 关履泰 (1946~), 男, 教授, 博士生导师.

向量 a 的 3 个分量, (O_x, O_y, O_z) 为 O 的全局坐标. 则 $P = T \cdot p$ 或 $p = T^{-1} \cdot P$ 称为局部坐标系下的坐标与全局坐标系下的坐标的变换公式.

1.1.2 边界盒的构造 为了得到初始点估计, 首先对曲面的参数区域进行分划, 分划的标准是基于子曲面的平坦度和边线性度. 在曲面参数域的分划中, 采用非均匀几何分划(图 1)从而在曲面上产生一系列的子曲面片, 其中子曲面片的边都是等参曲线. 具体的分划过程:

(1) 首先对 UV 域进行分划: 在对每一次分划结束后, 先检验其对应的子曲面片的平坦度和边线性度;

(2) 对子曲面片来说, 有 4 个顶点, 在每个顶点处作其法向量 n_i (图 2) 和其不同边上的切向量 t_i , 若 $1 - t_i \cdot t_j < \text{linearity}$ 和 $1 - n_i \cdot n_j < \text{flatness}$ 同时成立的话, 则其对应的子域块停止分划, 如果有上 2 式中任一个不成立, 则对应子域再次进行分划, 直至到上式均满足为止.

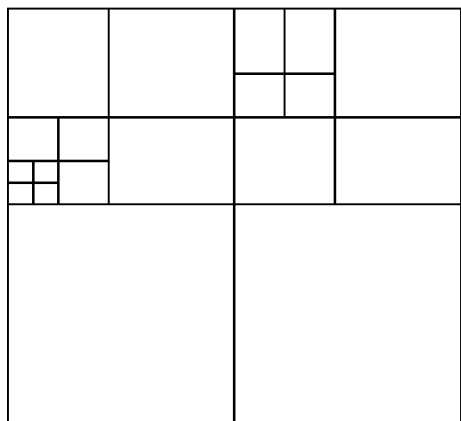


图 1 域的分划

Fig. 1 Division of domain

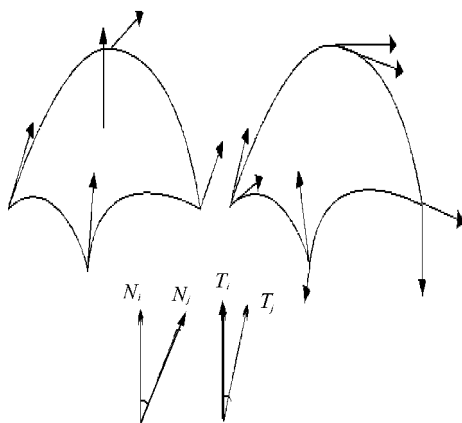


图 2 曲面片的法向量

Fig. 2 Normal vector of surface segment

(3) 进行分划完毕后, 每个子曲面片都满足平坦度和边线性度容差.

为了得到初始点估计, 可以通过构造边界盒的方法, 找出潜在的相交子曲面片, 裁剪掉不可能相交的曲面片, 以达到简化的目的. 在以上(1)、(2)、(3)步以后, 连接在每个曲面上的子曲面的顶点, 可以产生空间的四边形, 连接对角线, 产生了 2 个三角形, 通过这些三角形来构造边界盒确定初始点. 具体方法如下:

设 P_1, P_2, P_3 为三角形 A 的 3 个顶点, Q_1, Q_2, Q_3 为三角形 B 的 3 个顶点, 其中 P_1, P_2 是 u 边的端点, P_1, P_3 为 v 边的端点, 则构成位于三角形 A 的局部坐标系为:

$$\begin{aligned} u &= P_2 - P_1 \\ v &= P_3 - P_1 \\ w &= (X \times Y) / \|X \times Y\|_2, \\ O &= P_1 \end{aligned} \quad \text{变换矩阵 } T_a = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & O_x \\ u_y & v_y & w_y & O_y \\ u_z & v_z & w_z & O_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

且 $P = P' \cdot T_a$, P 和 P' 分别是同一点在全局坐标系下和局部坐标系下的坐标表示. 于是端点的局部坐标为: $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(1, 0, 0)$, $P_3(0, 1, 0)$, 利用 P_1, P_2, P_3 可产生三角形 A 坐标系下的边界盒, 基于三角形 B 的局部坐标和基于 A 的局部坐标的关系: $T_{ba} = T_b \cdot T_a^{-1}$, 其中

T_b 为 B 的局部坐标和全局坐标的变换矩阵.

边界盒测试包含以下3步: ① 将三角形 B 的边界盒的顶点从它的局部坐标系转换到三角形 A 的局部坐标系中, 使得2边界盒处在同一坐标系中; ② 如果三角形 B 的边界盒的某顶点落在三角形 A 的边界盒内, 则2边界盒一定相交, 测试结束; 否则, 继续下一步; ③ 调换 A, B 边界盒, 重复测试, 直到得出完整结果.

如果2个边界盒相撞, 下列步骤求出其交线:

① 将三角形 B 的边界盒各顶点从它们的局部坐标系转换到三角形 A 的局部坐标系中;

② 从三角形 B 中取出一边, 不妨记为 $Q'_1Q'_2$;

③ 如果 $Q'_{1z} \cdot Q'_{2z} > 0$, (Q'_{1z} 为 Q'_1 点的 z 轴坐标) 则与 A 必不相交, 转入上一步继续; 如果 $Q'_{1z} \cdot Q'_{2z} = 0$ 有2种可能: $Q'_{2z} = 0$, 或 $Q'_{1z} = 0$, 并且 $Q'_1Q'_2$ 落在它所在的曲面的边界上, 那么就计算线段 $Q'_1Q'_2$ 和三角形 A 各边之间的交点, 继续②; 如果 $Q'_{1z} = 0$, 那么端点 Q'_{1z} 为交点, 同样处理 $Q'_{2z} = 0$ 的情形, 继续②; 如果 $Q'_{1z} \cdot Q'_{2z} < 0$, 则线段 $Q'_1Q'_2$ 和平面 $z = 0$ 之间的交点可从下面2式计算: $Q^* = Q'_1 + t \cdot (Q'_2 - Q'_1)$, $t = (n_a Q'_1) / [n_a (Q'_2 - Q'_1)]$, 其中 Q^* 是交点, n_a 是三角形 A 的法矢, 即 $n_a = \{0, 0, 1\}$, 处理完毕, 转入②;

④ 将三角形 A, B 调换, 继续步骤①;

⑤ 在产生的交点中, 需要进行有效性判定, 以保证交点落入三角形 A 或 B 之内, 有效性判定为: (a) $0 \leq t \leq 1$; (b) $0 \leq Q_x^*, Q_y^* \leq 1$ 且 $(Q_x^* + Q_y^*) \leq 1$;

⑥ 确定最长的交线段;

⑦ 在⑥中得到的交线段2端点中, 有一个交点 Q^* 在 B 中是 Q_1Q_2 上的点, 其中, Q_1, Q_2 为三角形 B 的2个顶点, 则可以计算交点 Q^* 在2个曲面上的参数估计值, 记之为 $u_a^*, v_a^*, u_b^*, v_b^*$, 其计算公式依次为: $u_a^* = P_{1u} + Q_x^* (P_{2u} - P_{1u})$, $v_a^* = P_{1v} + Q_y^* (P_{3u} - P_{1u})$, $u_b^* = Q_{1u} + t (Q_{2u} - Q_{1u})$, $v_b^* = Q_{1v} + t (Q_{2v} - Q_{1v})$;

⑧ 最后利用 Newton-Raphson 方法可以计算出2个初始点附近的真实交点, 用下列等式构造 Newton-Raphson 迭代式: 假设 $(u_0, v_0), (s_0, t_0)$ 为曲面 $F(u, v), G(s, t)$ 的初始估计值.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)} \cdot \Delta u + \frac{\partial F}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} \cdot \Delta v - \frac{\partial G}{\partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} \cdot \Delta s - \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{(s_0, t_0)} \cdot \Delta t = \\ G(s_0, t_0) - F(u_0, v_0) \\ n \cdot \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)} \cdot \Delta u + n \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} \cdot \Delta v + 0 \cdot \Delta s + 0 \cdot \Delta t = \\ n \cdot \frac{G(s_0, t_0) - F(u_0, v_0)}{2} \end{cases}$$

其中, $n = n_F \times n_G$, n_F, n_G 是曲面在邻近点处的单位法矢.

1.2 追踪交线

通过上面的算法可以求得一系列的初始点, 通过初值点, 利用密切圆追踪交线.

1.2.1 相交曲线及其在不同参数平面的投影曲线 设有2个曲面 $p = F(u, v)$ 和 $q = G(w, s)$ 则它们的相交曲线可记为: $c(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, 其中 t 为参数, 不失一般性, 可设 $F(u, v), G(w, s), c(t)$ 均经过正规化处理, 即 $0 \leq t \leq 1, 0 \leq u, v, w, s \leq 1$ (图3).

则相交曲线 $c(t)$ 在 u - v 域和 w - s 域中的投影分别为 $a(t), b(t)$, 其中: $a(t) = \{u(t), v(t)\}, b(t) = \{w(t), s(t)\}$.

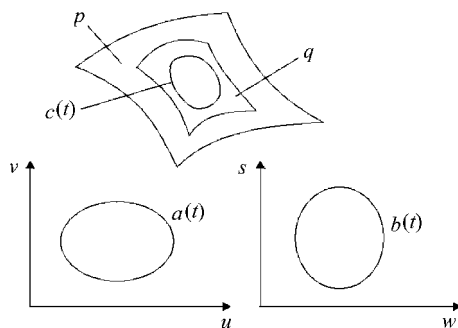


图 3 空间曲线投影

Fig 3 Projection of space curves

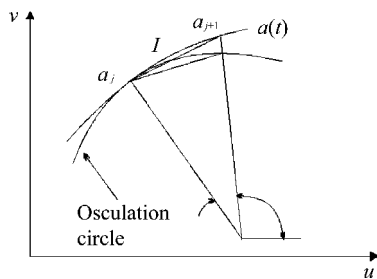


图 4 追踪交点

Fig 4 Tracing the intersection point

在处理实际问题时, $c(t)$ 以及 $a(t), b(t)$ 都是未知的, 所能得到的是一列离散的相关点, 这些相关点可被定义为: $c_i = c(t_i), a_i = a(t_i) = \{u_i, v_i\}, b_i = b(t_i) = \{w_i, s_i\}$.

1.2.2 Newton-Raphson 方法的具体应用 p 和 q 的相交曲线定义: $F(u, v) - G(w, s) = 0$, 应用 Newton-Raphson 方法可以得到公式: $[-F_u, -F_v, G_w, G_s]_j^T [\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta s]_j^T = F(u_j, v_j) - G(w_j, s_j)$, 初始迭代为: $\{u, v, w, s\}_1 = \{\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j, \bar{s}_j\}$, 其中, $\{\bar{u}_j, \bar{v}_j\} = \alpha_j, \{\bar{w}_j, \bar{s}_j\} = \beta_j$ 为 $c(t)$ 在 u - v 平面和 w - s 平面的投影. 在上式中有 4 个未知数, 3 个方程, 故需再引入方程:

$\Delta v / \Delta u = \tan \theta$ (如果 $|\tan \theta| \leq 1/2$) 或 $\Delta u / \Delta v = 1 / \tan \theta$ (如果 $|\tan \theta| > 1/2$)

若固定迭代次数, 则 θ 是一个不变量. 故方程组还可以写为:

$$\begin{cases} \{\Delta u, \Delta w, \Delta s\}_j^T = [(-F_u - \tan \theta \cdot F_v) G_w G_s]_j^{-1} (F(u_j, v_j) - G(w_j, s_j)) \\ \Delta v = \Delta u \cdot \tan \theta \\ \{u, v, w, s\}_1 = \{\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j, \bar{s}_j\} \end{cases}$$

1.2.3 下一个追踪点的初始值的确定 Newton-Raphson 方法对初始值的要求很高, 本算法采用密切圆的方法进行计算.

假定 C_j 和与之对应的 a_j, b_j 为已知, 并且对应的一阶和二阶导数也为已知. 在主曲面 $F(u, v)$ 上, 下一个追踪点 a_{j+1} 可以通过密切圆构造的方法很好地逼近出来(图4), 具体的方法为: 通过一个小角度 $\Delta \theta$ 从 a_j 处旋转得到 a_{j+1} , 并且可以通过连接 a_{j+1} 和密切圆圆心 (μ, ν) 得到 θ 的大小: $\tan \theta = (\bar{v}_{j+1} - \nu) / (\bar{u}_{j+1} - \mu)$.

对于 w - s 平面的点, 其初始值可以通过下式逼近出来:

$$\beta_{j+1} = b_j + \left\{ \frac{dw}{du}, \frac{ds}{du} \right\}_j^T (\bar{u}_{j+1} - u_j)$$

或者通过 $\beta_{j+1} = b_j + \left\{ \frac{dw}{dv}, \frac{ds}{dv} \right\}_j^T (\bar{v}_{j+1} - v_j)$, 其中, β_{j+1} 是相交点在 w - s 平面所对应的投影 b_{j+1} 的估计点.

1.3 排序

排序的方法是: 将所有包含奇异点的相交线段在奇异点处打断, 依以下准则排序: ① 有共同的端点; ② 从不同的父交线中产生; ③ 如果多条打断的交线有一共同的端点, 那么, 将

在该点区域内与当前打断交线有最小夹角的那条交线与之相连。

2 算 例

下面给出了 2 个实际的例子, 其中 1 个是平面和球面的相交, 另 1 个是球面和球面的相交. 图 5(a) 给出的实验结果是平面和球面相交的初始点, 图 5(b) 给出的实验给出了平面和球面相交点的追踪结果; 图 5(c) 给出了球面和球面的相交点的追踪结果. 从结果看, 本算法在解决 2 个曲面相交问题时, 有效地控制了在追踪过程中产生的误差, 利用密切圆的方法能获得最佳的迭代. 本算法的局限在于仅能处理 C^2 连续的曲面.

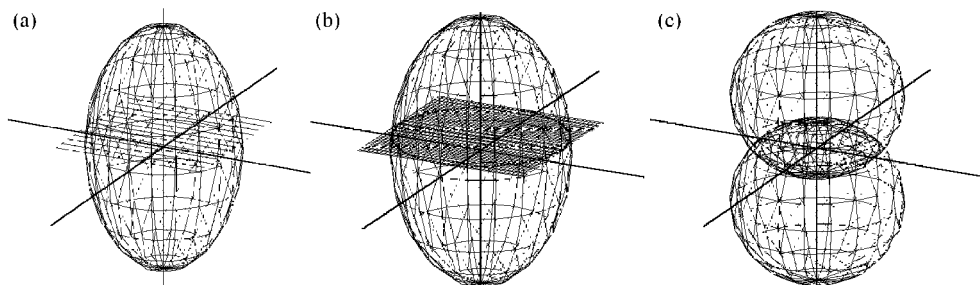


图 5 实验结果

Fig 5 Results of computing

参考文献:

- [1] BARNILL R E, KERSEY S N. A marching method for parametric surface/ surface intersection[J] . Computer Aided Geometric Design, 1990, 3: 235 ~ 239.
- [2] 穗板卫(日). CAD/CAM 中曲线和曲面造型[M] . 北京: 海洋出版社, 1995. 78 ~ 112.
- [3] GREGOR M. Convergence of a surface/ surface intersection algorithm[J] . Computer Aided Geometric Design, 1990, 7: 415 ~ 423.

Surface/ Surface Intersection Using Projection

GUAN Lü-tai^{*}, LU Feng, YANG Zhao-xia

Abstract: There are two major algorithms in Surface/ Surface Intersection: Geometric Segments and Numerical Tracing; for the sake of system's stability and accuracy, a reasonable and Topo coherented algorithm is needed when one computes the surface and surface intersection. A new method is presented to compute the intersection using projection, by which the above problem can be solved successfully.

Keywords: projection; intersection; Newton-Raphson method; SSI

^{*} Department of Computation Science and Computer Applications Zhongshan University, Guangzhou 510275, China