

文章编号: 0529-6579 (2000) S2-0161-04

广义双非中心 F 分布和 β 分布*

王 琪¹, 滕成业², 李绍明²

(1. 中山大学理论部, 广州 510275; 2. 中山大学数学系)

摘 要: 给出了在修正的第二类椭圆等高分布下的双非中心 F 分布和 β 分布, 这些结果同样可以推广到第一类椭圆等高分布下.

关键词: 椭圆等高分布; 带状多项式; F 分布; β 分布

中图分类号: O212.2.4 **文献标识码:** A

在小样本精确分布的问题中, 许多多元分布的讨论都是在多元正态分布的假设下进行的. 自 1970 年, 人们开始越来越多地关注非正态分布下的多元分布问题, 其中椭圆等高分布是正态分布的重要推广, 它与正态分布有许多相似的性质, 可以把基于正态分布的多元分析的大部分理论和方法平行地搬到这个分布类上来.

在第三类椭圆等高分布下, 文 [1, 2] 已经给出了许多广义多元分布的结果, 文 [3] 把矩阵变元的带状多项式的定义推广到了微分环上, 这使得许多第一、二类椭圆等高分布下的多元分布问题得以解决. 本文首先介绍一些矩阵变元的带状多项式的性质, 以及微分环上带状多项式的性质; 然后给出第二类椭圆等高分布下的广义双非中心 F 分布和 β 分布; 最后将平行地把第二类椭圆等高分布下的分布结果推广到第一类椭圆等高分布下.

1 带状多项式的性质

1.1 矩阵变元的带状多项式的性质

这里只介绍矩阵变元的带状多项式的一些性质, 详细的讨论及证明见文 [4~7]. 以下的性质中, k, λ, ζ, Φ 及 $k_1, \dots, k_r$ 分别为 $k, j, l, k+j+l$ 及 $k_1, \dots, k_r$ 的不超过 m 部分的划分.

$$C_{\Phi}^{k_1, \dots, k_r}(PX_1P^{-1}, \dots, PX_rP^{-1}) = C_{\Phi}^{k_1, \dots, k_r}(X_1, \dots, X_r) \quad (1)$$

$$\int_{O(m)} C_{K_1}(HA_1H'X_1) \cdots C_{K_r}(HA_rH'X_r)(dH) = \sum_{\Phi \in k_1, \dots, k_r} \frac{C_{\Phi}^{k_1, \dots, k_r}(A_1, \dots, A_r) C_{\Phi}^{k_1, \dots, k_r}(X_1, \dots, X_r)}{C_{\Phi}(I)} \quad (2)$$

* 基金项目: 中山大学高等学术基金 (98M4) 资助项目

收稿日期: 2000-10-01; 作者简介: 王 琪 (1969~), 女, 讲师.

$$\int_{O(m)} C_{\Phi}^{k_1, \dots, k_r}(A'H'X_1HA, \dots, A'H'X_rA)(dH) = \frac{C_{\Phi}^{k_1, \dots, k_r}(X_1, \dots, X_r) C_{\Phi}(A'A)}{C_{\Phi}(I)} \quad (3)$$

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q; Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_k \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k C_k(Z)}{(b_1)_k \dots (b_q)_k K!} \quad (4)$$

$$\text{特别地, } {}_0F_0(Z) = \text{etr}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_k \frac{C_k(Z)}{k!}, {}_0F_1\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{4}XX'\right) = \int_{O(m)} \text{etr}(XH)(dH) \\ \int_0^1 C_k(T)(\det T)^{t-p}(dT) = \Gamma_m(t, k) \Gamma_m(p) C_k(I) / \Gamma_m(t+p, k) \quad (5)$$

其中, $\Gamma_m(t, k)$ 的定义见文[5].

1.2 微分环上带状多项式的性质

假定 $f(X)$ 是一个矩阵变元的光滑函数, 其中 $x_{ij} \in F, f(X) \in F, F$ 是实数(复数)域, 可以对 $f(x)$ 上的微分算子建立一个微分环, 以普通的加法运算作为环的加法运算, 以矩阵的乘法运算作为环的乘法运算, 记该微分环为 $F[\partial X]$, 其中 ∂X 是矩阵微分算子. $\partial X = \frac{1}{2}(1 + \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial X_{ij}}, \delta_{ij}$ 是 Kronecker's δ .

文[3]把带状多项式的定义扩展到了微分环上, 并且证明了矩阵变元的带状多项式的性质, 可以平行地推广到微分环上. 因此, 上述性质在微分环上同样成立. 本文将利用这些性质讨论多元分布的问题.

2 广义多元非中心 F 和 β 分布

定义 1 随机矩阵 Y 称为服从修正的第二类椭圆分布, 如果它的密度函数为:

$$(\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} f(\text{diag}(\Sigma^{-\frac{1}{2}}(Z - M)'(Z - M)\Sigma^{-\frac{1}{2}}))$$

其中, M 是 $n \times m$ 矩阵, Σ 是半正定矩阵, $f(\cdot)$ 为可泰勒展开的函数. 记 Y 服从 $F_2^+(M, \Sigma, n \times m)$, Z_1, Z_2 分别是 $n \times m$ 矩阵.

定义 2 设 $Z = (Z'_1, Z'_2)$ 服从 $F_2^+(M, \Sigma, n \times m)$, Z_1, Z_2 分别是 $n \times m$ 随机矩阵, $n_1, n_2 \geq m, M = (M'_1, M'_2)', M_1, M_2$ 分别是 $n \times m$ 矩阵. 令

$$F = \frac{n_2}{n_1} (Z'_1 Z_1)^{\frac{1}{2}} (Z'_2 Z_2) (Z'_1 Z_1)^{\frac{1}{2}}, G = (Z'Z)^{-1/2} (Z'_1 Z_1) (Z'Z)^{-1/2}$$

则 F, G 分别称为广义双非中心 F 矩阵分布和 β 矩阵分布, 自由度分别为 n_1 和 n_2 , 双非中心系数为 $\Omega_1 = \Sigma^{1/2} M'_1 M_1 \Sigma^{1/2}, \Omega_2 = \Sigma^{1/2} M'_2 M_2 \Sigma^{1/2}$

定理 1 设 $Z = Z'_1, Z'_2$ 服从 $F_2^+(M, \Sigma, n \times m), A = Z'_1 Z_1, B = Z'_2 Z_2$, 那么 A 和 B 的联合分布为:

$$\frac{\pi^{m(n_1+n_2)/2} (\det \Sigma)^{-n/2} (\det A)^{(n_1-m-1)/2} (\det B)^{(n_2-m-1)/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma_m\left(\frac{n_2}{2}\right)} \text{etr}(\partial X \Sigma^{-1/2} (A + B) \Sigma^{-1/2}) \cdot \\ {}_0F_1\left(\frac{n_1}{2}; \partial X \Omega_1 \partial X \Sigma^{-1/2} A \Sigma^{-1/2}\right) \cdot {}_0F_1\left(\frac{n_2}{2}; \partial X \Omega_2 \partial X \Sigma^{-1/2} B \Sigma^{-1/2}\right) \cdot f|\text{diag}(\Omega)$$

证明 由定义 2, Z_1, Z_2 的联合分布为:

$$(\det \Sigma)^{-1/2} f(\text{diag}(\Sigma^{-1/2} (Z'_1 Z_1 + Z'_2 Z_2) \Sigma^{-1/2} -$$

$$2\Sigma^{-1/2}M'_1Z_1\Sigma^{-1/2} - 2\Sigma^{-1/2}M'_2Z_2\Sigma^{-1/2} + \Omega)(dZ_1)(dZ_2)$$

其中, $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, 令 $Z_1 = H_1T_1, Z_2 = H_2T_2, H'_1H_1 = I_m, H'_2H_2 = I_m, T_1, T_2$ 为上三角阵, $A = Z'_1Z_1 = T'_1T_1, B = Z'_2Z_2 = T'_2T_2$, 又因为:

$$(dZ_1) = 2^{-m}(\det A)^{(n_1-m-1)/2}(dA)(H'_1dH_1), (dZ_2) = 2^{-m}(\det B)^{(n_2-m-1)/2}(dB)(H'_2dH_2)$$

所以把上述结果代入最初的分布中并关于 H_1, H_2 积分, 然后将 f 在点 $\text{diag}(\Omega)$ 处展开成泰勒级数, 因为 f 是光滑函数, 设积分、微分、求和运算可以交换次序, 利用文[7]定理 2.1.15 和引理 9.5.3 和微分环上矩阵变元的带状多项式的性质可证定理.

定理 2 设 $Z = Z'_1, Z'_2$ 服从 $F_2^+(M, \Sigma, n \times m)$, 那么双非中心矩阵 F 的分布密度为:

$$\frac{\pi^{m(n_1+n_2)/2}(\det \Sigma)^{-1/2} \Gamma_m\left(\frac{n_1+n_2}{2}, \Phi\right) \Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma_m\left(\frac{n_2}{2}\right) \Gamma_m\left(\frac{n_1+n_2+m+1}{2}, \Phi\right)} \det(F)^{-(n_1+m+1)/2} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{-(n_2+m+1)/2}.$$

$$\sum_{k,l,j} \sum_{\Phi \in K^{\lambda,\zeta}} \frac{C_{\Phi}^{k,\lambda,\zeta}(\partial X \Sigma^{-1}, \partial X \Omega_2 \partial X \Sigma^{-1}, \partial X \Omega_1 \partial X \Sigma^{-1})}{k!j!l! \left(\frac{n_1}{2}\right)_\lambda \left(\frac{n_2}{2}\right)_\zeta} \cdot \frac{C_{\Phi}^{k,\lambda,\zeta}\left(I + \frac{n_2}{n_1}F, I, \frac{n_2}{n_1}F\right)}{C_{\Phi}(I)} \circ f|_{\text{diag}(\Omega)}$$

证明 作变换令 $F = A^{-1/2}BA^{-1/2}, U = A$. 因为

$$(dA)(dB) = (\det U)^{m+1/2}(\det \bar{F})^{-m-1}(dU)(d\bar{F})$$

所以, 由定理 1, 可得 $\bar{F}, U$ 的联合分布为

$$\frac{\pi^{m(n_1+n_2)/2}(\det \Sigma)^{-1/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma_m\left(\frac{n_2}{2}\right)} \det(\bar{F})^{-(n_2+m+1)/2} (\det U)^{-(n_2+m+1)/2}$$

$$\sum_{k,l,j} \sum_{\Phi \in K^{\lambda,\zeta}} \frac{C_k(\partial X \Sigma^{-1} U (I + \bar{F}^{-1}) \Sigma^{-1/2})}{C_\lambda(\partial X \Omega_1 \partial X \Sigma^{-1/2} U \Sigma^{-1/2}) C_\zeta(\partial X \Omega_2 \partial X \Sigma^{-1/2} U^{1/2} \bar{F} U^{1/2} \Sigma^{-1/2})} \circ f|_{\text{diag}(\Omega)} (dU)(d\bar{F})$$

$$k!j!l! \left(\frac{n_1}{2}\right)_\lambda \left(\frac{n_2}{2}\right)_\zeta$$

现利用性质(1)(2)(3), 上式中的三个带状多项式变为:

$$C_k(\partial X \Sigma^{-1/2} U (I + \bar{F}^{-1}) \Sigma^{-1/2}) C_\lambda(\partial X \Omega_1 \partial X \Sigma^{-1/2} U \Sigma^{-1/2}) C_\zeta(\partial X \Omega_2 \partial X \Sigma^{-1/2} U^{1/2} \bar{F} U^{1/2} \Sigma^{-1/2}) =$$

$$C_{\Phi}^{k,\lambda,\zeta}(\partial X \Sigma^{-1}, \partial X \Omega_2 \partial X \Sigma^{-1}, \partial X \Omega_1 \partial X \Sigma^{-1}) \frac{C_{\Phi}^{k,\lambda,\zeta}(U(I + \bar{F}^{-1}), U, U(\bar{F}^{-1}))}{C_{\Phi}(I)} \circ f|_{\text{diag}(\Omega)}$$

$$\text{和 } C_{\Phi}^{k,\lambda,\zeta}(U(I + \bar{F}^{-1}), U, U\bar{F}^{-1}) = \frac{C_{\Phi}^{k,\lambda,\zeta}(I + \bar{F}^{-1}, I, \bar{F}^{-1}) C_{\Phi}(U)}{C_{\Phi}(I)}$$

关于 U 积分, 利用性质(5), 定理即可证明.

定理 3 如果 $Z = Z'_1, Z'_2$ 服从 $F_2^+(M, \Sigma, n \times m)$, 那么双非中心矩阵 G 的密度函数为:

$$\frac{\pi^{m(n_1+n_2)/2}(\det \Sigma)^{-n/2} \Gamma_m\left(\frac{n_1+n_2}{2}, \Phi\right) \Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma_m\left(\frac{n_2}{2}\right) \Gamma_m\left(\frac{n_1+n_2+m+1}{2}, \Phi\right)} \det(G)^{(n_2+m-1)/2} \det(I - G)^{(n_2+m-1)/2}.$$

$$\sum_{k,l,j} \sum_{\Phi \in K^{\lambda,\zeta}} \frac{C_{\Phi}^{k,\lambda,\zeta}(\partial X \Sigma^{-1}, \partial X \Omega_2 \partial X \Sigma^{-1}, \partial X \Omega_1 \partial X \Sigma^{-1})}{k!j!l! \left(\frac{n_1}{2}\right)_\lambda \left(\frac{n_2}{2}\right)_\zeta} \cdot \frac{C_{\Phi}^{k,\lambda,\zeta}(I, G, I - G)}{C_{\Phi}(I)} \circ f|_{\text{diag}(\Omega)}$$

证明 作变换令 $C = A + B$.

因为 $(dA)(dB) = (dA)(dC)$, 故可将 A 和 B 的联合密度函数变为 A 和 C 的联合密度函数, 然后再作变换, $A = C^{1/2}GC^{1/2}$, 则有: $(dA)(dC) = (\det C)^{(m+1)/2}(dG)(dC)$

又可将该联合密度函数变为 C 和 G 的联合密度函数, 关于 C 的积分可证明定理.

3 关于第一类椭球等高分布下的广义多元分布

定义 3 随机矩阵 Z 称为服从第一类椭球等高分布, 如果它的密度函数为:

$$(\det \Sigma)^{-1/2} f((Z - M)' \Sigma^{-1} (Z - M))$$

其中, M 是 $n \times m$ 矩阵, Σ 是半正定矩阵, $f(\cdot)$ 为可泰勒展开的函数. 记 Z 服从 $F_2^+(M, \Sigma, n \times m)$.

对于第一类椭球等高分布下的广义多元分布, 只要将算子 $\partial X = (\partial/\partial x_{11}, \dots, \partial/\partial x_{mm})$ 改为 $\partial X = \left(\frac{1}{2}(1 + \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$, 就可以得到一系列类似与第二类椭球等高分布的结果.

参考文献:

- [1] 滕成业, 方宏斌, 邓炜材. 广义非中心 Wishart 分布. 数学研究与评论. 1989 (4): 479 ~ 488.
- [2] 方宏斌, 滕成业. 广义非中心 F 分布和 Beta 分布. 数理统计及应用概率, 1989 (1): 70 ~ 79.
- [3] 李绍明, 滕成业. 微分环上的带壮多项式及其应用. 昆明理工大学学报(自然科学版), 1997 (6): 48 ~ 51.
- [4] FARRELL R H. Techniques of multivariate calculation, Springer Verlag, New York, 1976: 50 ~ 150.
- [5] CONSTATINE A O. Some noocentral distribution problems in multivariate analysis. Ann Math Statist, 1963 (34): 1270 ~ 1285.
- [6] CHIKUSE Y, DAVIS A W. Some properties of invariant polynomials with matrix arguments and their applications in econometrics. Ann Inst Statist Math, 1986 (38): 109 ~ 122.
- [7] MUIHEAD R J. Aspect of multivariate statistical theory. New York: John Willey and Sons, Inc, 1982. 100 ~ 288.

Generalized Doubly Noncentral F and β Distributions

WANG Qi^{*}, TENG Cheng-ye, LI Shao-ming

Abstract: The generalized doubly noncentral F and β distributions under the second elliptically contoured distribution are obtained. These results can be generalized on the first elliptically contoured distribution.

Keywords: the elliptically contoured distribution; zonal polynomial; F and β distributions

* Education College, Zhongshan University, Guangzhou 5102775, China