

连续非线性系统的迭代学习控制算法*

田森平, 谢胜利, 傅予力

(华南理工大学无线电与自动控制研究所, 广东 广州 510640)

摘 要: 对连续非线性系统的迭代学习控制方法进行了讨论, 充分利用了系统以前控制经验的信息, 将输入信号和输出信号作为一个整体来研究, 证明了所给的控制算法是全局收敛的, 且有理想的目标跟踪. 克服了目前这一研究领域中所存在的一些缺陷和不足, 为相应问题的研究提供了一条新的途径.

关键词: 非线性系统; 迭代学习控制; 目标跟踪; 收敛

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

学习控制方法是控制理论中新发展起来的一个新方法^[1], 已经受到控制界的广泛关注, 近年来, 人们对它进行了大量的研究. 学习控制方法的主要特点是不需要控制系统的精确描述, 只是利用控制系统先前的控制经验, 自动调节不理想的输入信号, 使被控对象产生期望的运动. 由于迭代学习控制方法的基本理论还没有完全建立, 因此目前的研究中还有着一些不足, 如学习控制不收敛而导致目标跟踪精度太差^[2~4]; 学习控制过程只是局部收敛而不是全局收敛^[5~7]等. 本文提出了一种新的迭代学习控制算法, 该算法较充分地利用了系统先前控制经验的信息, 通过整体考虑输入信号和输出信号, 证明了所给算法的全局收敛性.

1 新算法及问题的转化

考虑如下形式的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) \\ y(t) = C(x, t) + B(t)u(t) \end{cases} \quad (1)$$

及初值条件: $x(0) = x_0$ (2)

其中 $x \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $u \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, $y \in \mathbf{R}^{l \times 1}$, f, C, B 是相应维数的向量或矩阵函数, 且都是 Lipschitz 连续的, 即:

$$\|f(x_1, u_1, t) - f(x_2, u_2, t)\| \leq L_f (\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|) \quad (3)$$

$$\|C(x_1, t) - C(x_2, t)\| \leq L_C \|x_1 - x_2\| \quad (4)$$

式中, L_f 与 L_C 不是具体知道的.

我们的迭代学习控制算法如下:

$$u_{k+1}(t) = u_{ka}(t) + u_{kb}(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5a)$$

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (69874013); 广东省自然科学基金资助项目 (980506).

收稿日期: 2000-09-18; 作者简介: 田森平 (1961~), 男, 副教授; 研究方向: 微分方程稳定性和定性理论, 迭代学习控制算法.

其中

$$\begin{aligned} u_{ka}(t) &= \Gamma(t)u_k(t) + D(t)e_k(t), \quad k = 1, 2, \dots \\ u_{kb}(t) &= \begin{cases} 0 & k = 1, 2, \dots, N; \\ \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t)u_{k-i}(t) & k = N+1, N+2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) = I - \Gamma(t), \quad e_k(t) = y_k(t) - y_d(t)$$

$$y_k(t) = C(x_k(t), t) + B(t)u_k(t), \quad x_k(0) = x_0, k = 1, 2, \dots$$

我们的目的是要确定算法中的学习系数矩阵 $\Gamma(t)$, $\Gamma_i(t)$, $D(t)$, 使得

$$u_k(t) \rightarrow u_d(t), y_k(t) \rightarrow y_d(t), \quad k \rightarrow +\infty, t \in [0, T]$$

对以上问题, 我们将转化成某一系统的渐近稳定性问题. 因为要考虑的是 $\{u_k(t)\}$ 和 $\{e_k(t)\}$ 对 k 的收敛性, 故只须考虑 $k > N$ 的情形.

定理 1.1 记 $\Delta u_k(t) = u_k(t) - u_d(t)$, $Q_k(t) = \begin{pmatrix} e_k(t) \\ \Delta u_k(t) \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{pmatrix} I + B(t)D(t)B(t)(\Gamma(t) - I) \\ D(t)\Gamma(t) \end{pmatrix}, \\ F_k(t) &= \begin{pmatrix} B(t) \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \Delta u_{k-i}(t) - C(x_k(t), t) + C(x_{k+1}(t), t) \\ \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \Delta u_{k-i}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则有如下等式成立

$$Q_{k+1}(t) = A(t)Q_k(t) + F_k(t) \quad k > N \quad (6)$$

证明 由(5a, b) 及条件知, 对 $k > N$, 有

$$u_{k+1}(t) = \Gamma(t)u_k(t) + D(t)e_k(t) + \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t)u_{k-i}(t) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) - u_d(t) &= \Gamma(t)(u_k(t) - u_d(t)) + D(t)e_k(t) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t)(u_{k-i}(t) - u_d(t)) \end{aligned} \quad (8)$$

故

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) - u_k(t) &= (\Gamma(t) - I)(u_k(t) - u_d(t)) + D(t)e_k(t) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t)(u_{k-i}(t) - u_d(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

于是

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) &= e_k(t) + (y_{k+1}(t) - y_k(t)) = \\ &= (I + B(t)D(t))e_k(t) + B(t)(\Gamma(t) - I)(u_k(t) - u_d(t)) + \\ &\quad B(t) \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t)(u_{k-i}(t) - u_d(t)) + C(x_{k+1}(t), t) - C(x_k(t), t) \end{aligned} \quad (10)$$

由(8)、(10) 及 $\Delta u_k(t)$ 、 $Q_k(t)$ 、 $A(t)$ 、 $F_k(t)$ 的定义便知定理的结论成立.

2 系统(6)的稳定性分析

从上节知,要使算法收敛和目标跟踪,我们只要证明: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k(t)\| = 0, t \in [0, T]$. 由(6),我们有(各种范数的定义与文献[8]相同)

$$Q_k(t) = A^{k-N}(t)Q_N(t) + \sum_{i=N}^{k-1} A^{k-i-1}(t)F_i(t), k > N \quad (11)$$

所以

$$\|Q_k(t)\| \leq (\rho(A(t)))^{k-N} \|Q_N(t)\| + \sum_{i=N}^{k-1} (\rho(A(t)))^{k-i-1} \|F_i(t)\| \quad (12)$$

由此,要估计 $\|Q_k(t)\|$ 必须先对 $\|F_i(t)\|$ 进行估计.

定理 2.1 定理 1.1 中定义的 $F_k(t)$ 满足如下估计式:

$$\begin{aligned} \|F_K\|_{\lambda(\zeta)} &\leq \sum_{i=1}^N \left[\|B(t)F_i(t)\| + \|F_i(t)\| + \frac{L_C L_f}{\lambda(\lambda - L_f)} \|F_i(t)\| \right] \zeta^N \|Q_{k-i}\|_{\lambda(\zeta)} + \\ &\frac{L_C L_f}{\lambda(\lambda - L_f)} (\|F(t) - I\| + \|D(t)\|) \|Q_k\|_{\lambda(\zeta)}, k > N \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\zeta > 1$.

证明 由 $F_k(t)$ 的定义可得到

$$\begin{aligned} \|F_k(t)\| &\leq \sum_{i=1}^N (\|B(t)F_i(t)\| + \|F_i(t)\|) \times \\ &\|\Delta u_{i-1}(t)\| + L_C \|x_{i+1}(t) - x_i(t)\| \end{aligned} \quad (14)$$

因 $x_k(0) = x_0, k = 1, 2, \dots$, 则

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \int_0^t L_f (\|x_{k+1}(s) - x_k(s)\| + \|u_{k+1}(s) - u_k(s)\|) ds \quad (15)$$

由熟知的 Bellman-Gronwall 不等式及范数的定义^[8]有:

$$\|x_{k+1} - x_k\|_{\lambda(\zeta)} \leq \frac{L_f}{(\lambda - L_f)\lambda} \|u_{k+1} - u_k\|_{\lambda_\zeta} \quad (16)$$

又由(9)有:

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| &\leq \|D(t)\| \|e_k(t)\| + \|F(t) - I\| \|\Delta u_k(t)\| + \\ &\sum_{i=1}^N \|F_i(t)\| \|\Delta u_{k-i}\| \end{aligned} \quad (17)$$

将(16)和(17)代入(14)便可得到要证明的(13)式.

利用函数的连续性容易证明下列引理的结论成立:

引理 2.1 设 $(v, \rho) \in (0, 1)^2$, 且 $\frac{\alpha \rho^N}{1 - \rho} \in (0, 1)$, 则对任意 $b, c > 0$, 存在 $(\zeta, \eta) \in \Omega$, 使得 $(v\zeta, f(\zeta, \eta)) \in (0, 1)^2$, 其中 $\Omega = \{(x, y) \mid x > 1, y > 0, f(x, y) = \frac{(\rho x)^N}{1 - \rho x} [x^{N+1}(a + cy) + bxy]\}$.

定理 2.2 如果 $\rho(A(t)) \leq \rho < 1, \frac{\rho^N}{1 - \rho} \sum_{j=1}^N b_j < 1$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k(t)\| = 0, t \in [0, T]$.

其中 $b_j = \max_{0 \leq t \leq T} (\|B(t)F_j(t)\| + \|F_j(t)\|)$.

证明 由定理的条件及引理 2.1 知,存在常数对 (ζ, η) , 使得:

$$0 < \frac{(\rho\zeta)^N}{1 - \rho\zeta} \left[\zeta^{N+1} \sum_{j=1}^N (b_j + \eta \Gamma_j L_C) + \zeta \eta L_C d \right] < 1 \quad (18)$$

其中 $\eta > 0, \zeta > 1$, 且 $\Gamma_j = \sup_{0 \leq t \leq T} (\|\Gamma_j(t)\|)$, $d = \sup_{0 \leq t \leq T} (\|D(t)\|)$.

取 λ 使得 $\frac{L_f}{\lambda(\lambda - L_f)} < \eta$, 则有:

$$0 < h = \frac{(\rho\zeta)^N}{1 - \rho\zeta} \left[\zeta^{N+1} \sum_{j=1}^N \left(b_j + \frac{L_C L_f \Gamma_j}{\lambda(\lambda - L_f)} \right) + \zeta \frac{L_C L_f d}{\lambda(\lambda - L_f)} \right] < 1 \quad (19)$$

对上述选定的 ζ 和 λ , 利用(12) 及定理 2.1 可得:

$$\begin{aligned} (\|\mathbf{Q}_k(t)\| \zeta^k) e^{-\lambda t} &\leq \rho^{-N} \|\mathbf{Q}_N\|_{\lambda} + \sum_{i=N}^{k-1} (\rho\zeta)^{k-i-1} \zeta \|\mathbf{F}_i\|_{\lambda(\zeta)} \leq \\ &\rho^{-N} \|\mathbf{Q}_N\|_{\lambda} + h \sup_{1 \leq i \leq k} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}), k > N \end{aligned} \quad (20)$$

由于(20) 右边与 t 无关, 且关于 k 是不减的, 则

$$\sup_{N \leq i \leq k} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}) \leq \rho^{-N} \|\mathbf{Q}_N\|_{\lambda} + h \sup_{1 \leq i \leq k} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}) \quad (21)$$

从而

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i \leq k} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}) &\leq \sup_{1 \leq i \leq N} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}) + \sup_{N \leq i \leq k} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}) \leq \\ &\sup_{1 \leq i \leq N} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}) + \rho^{-N} \|\mathbf{Q}_N\|_{\lambda} + h \sup_{1 \leq i \leq k} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}) \end{aligned} \quad (22)$$

由此可得

$$\sup_{1 \leq i \leq k} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}) \leq \frac{m}{1 - h}, \quad \text{其中 } m = \sup_{1 \leq i \leq N} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}) + \rho^{-N} \|\mathbf{Q}_N\|_{\lambda}$$

因此

$$\|\mathbf{Q}_k(t)\| \leq \zeta^{-k} e^{\lambda t} \sup_{1 \leq i \leq k} (\|\mathbf{Q}_i\|_{\lambda(\zeta)}) \leq \frac{m e^{\lambda T}}{1 - h} \zeta^{-k} \quad (23)$$

由 $\zeta > 1$, 便知定理结论成立.

本文对非线性系统的迭代学习控制问题进行了较深入的研究, 给出了一种新的迭代学习控制算法, 该算法较充分地利用了系统以前控制经验的信息. 在处理方法上, 将输入信号 $u_k(t)$ 和输出信号 $y_k(t)$ 作为一个整体 $(u_k(t), y_k(t))$ 来研究, 使得所考虑的控制算法是全局收敛的, 且有理想的目标跟踪. 本文的研究克服了目前这一研究领域中所存在的一些缺陷和不足, 为相应问题的研究提供了一条新的途径.

参考文献:

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robotics by learning[J]. J Robotic Syst, 1984, 1(2): 123 ~ 140.
- [2] JANG T J, CHO C H, AHA H S. Iterative learning control in feedback systems[J]. Automatica, 1995, 31(2): 243 ~ 248.
- [3] NANIWA T, ARIMOTO S. Learning control for robot tasks under geometric endpoint constraints[J]. IEEE Trans on Robotics and Automation, 1995, 11(3): 432 ~ 441.
- [4] HEINZINGER G, FEBWUGG D, PADEN B. Stability of learning control with disturbances and uncertain initial

- conditions[J]. IEEE Trans Autom Control, 1992,37(1):110 ~ 114.
- [5] WANG D. A simple iterative learning controller for manipulators with flexible joints[J]. Automatica, 1995,31(9):1341 ~ 1344.
- [6] KUC T Y, LEE J S, NAM K. An iterative learning control theory for a class of nonlinear dynamic systems[J]. Automatica, 1992, 28(6):1215 ~ 1221.
- [7] LUCIBELLO P. State steering by learning for a class of nonlinear control system[J]. Automatica, 1994,30(7):1463 ~ 1468.
- [8] 谢胜利,谢振东,韦岗.非线性离散系统的学习控制方法[J].华南理工大学学报,1998,26(12):7 ~ 13.

Iterative Learning Control Algorithms for Nonlinear Continuous Systems

TIAN Sen-ping^{}, XIE Sheng-li, FU Yu-li*

Abstract: This paper discusses the iterative learning control method for nonlinear continuous systems. A prior control experiences for the systems are fully utilized. Moreover, the input and output signals are considered as a whole that a globally convergent control algorithm is obtained and the ideal target tracking is received. This study overcomes some defects and lacks existed in the present research on this area and can supply with a new way to the solution of the related problems.

Keywords: nonlinear system; iterative learning control; target tracking; convergence

* Institute of Radio and Automatic Control, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China