

三种群 Lotka-Volterra 竞争系统的渐近性态*

王远世, 朱思铭
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘要: 讨论3种群 Lotka-Volterra 竞争系统中各种群在其环境容纳量处均为局部吸引子的情形, 给出了系统的全局拓扑结构随参数变化的各种情况.

关键词: Lotka-Volterra 竞争系统; 局部排斥子; 渐近性态

中图分类号: O175.24 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 01-0006-03

1 问题引入

考虑以下3种群 Lotka-Volterra 竞争系统

$$x_i' = x_i(b_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

设 $a_{ij} > 0, i \neq j, j \in \{1, 2, 3\}$, 表示任意2种群之间都存在相互竞争. 设 $b_i > 0, i \in \{1, 2, 3\}$, 即种群 i 具有正的固有增长率 $f_i(x_1, x_2, x_3) = b_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j$; 设 $a_{ii} > 0, i \in \{1, 2, 3\}$, 表示种群 i 在无其它种群竞争时, 其生长数量受到环境容纳量的限制. 由 $x_i = 0, i \in \{1, 2, 3\}$ 均为系统(1)的不变曲面, 且 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ 种群数, 故本文对于(1)的讨论均 $\mathbf{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$ 中进行. 不难求得系统(1)有平衡点 $0(0, 0, 0)$, $R_1(b_1/a_{11}, 0, 0)$, $R_2(0, b_2/a_{22}, 0)$, $R_3(0, 0, b_3/a_{33})$.

定义^[1] 称向量 $x \in \mathbf{R}_+^3$ 为严格正向的 (strictly positive), 如果 x 的每一分量均大于0. 称 $\mathbf{R}_+^3$ 中二点 u, v 是相关的 (related), 如果 $u-v$ 或 $v-u$ 是严格正向的. 称 $\mathbf{R}_+^3$ 中的集合 S 为平衡稳的 (balanced), 如果 S 中任意2点都不是相关的.

引理 1^[2] 系统(1)从 $\mathbf{R}_+^3 \setminus \{0\}$ 出发的每一轨道的 ω 极限集必落在平衡稳的单纯形 (carrying simplex) Σ 上, Σ 通过径向射影变换同胚于单位单纯形 (unit simplex) Δ (见图1).

引理 2^[1] R_i 在平面 $x_j = 0$ 沿 $\partial\Sigma$ 为局部吸引子的充要条件是 $b_i/a_{ii} > b_k/a_{ki}, i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ 各不相同.

引理 3^[1] 若 $R_i, i \in \{1, 2, 3\}$ 在 Σ 上均为局部吸引子, 则系统(1)无周期解.

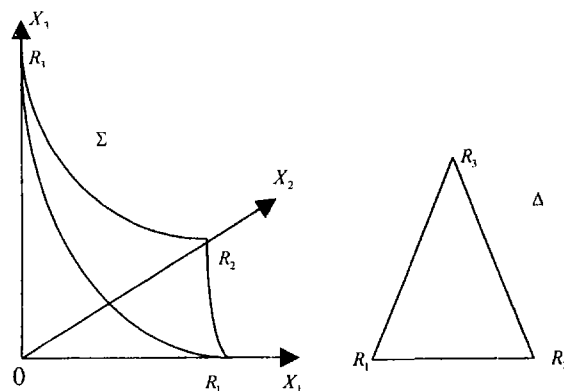


图1 单纯形

Fig.1 Simplex

本文以下符号中各下标均在集合 $\{1, 2, 3\}$ 内变化, 若某个下标 i 大于3, 则取 i 为 i 对3的模 $i \bmod 3$. 记平面 $\pi_i: b_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j = 0, i \in \{1, 2, 3\}$, 并记 $f_i(x_1, x_2, x_3) = b_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j$. 在引理2的条件下, 易见 π_2, π_3 在平面 $x_1 = 0$ 交于 p_1 , π_2, π_3 在平面 $x_2 = 0$ 交于 p_2 , π_1, π_2 在平面 $x_3 = 0$ 交于 p_3 . 若 $b_2/a_{21} > b_3/a_{31}$, 则 π_2, π_3 在平面 $x_2 = 0$ 交于 p_{23} , 若 $b_2/a_{21} < b_3/a_{31}$, 则 π_2, π_3 在平面 $x_3 = 0$ 交于 p_{32} . 一般地, 记 π_i 与 π_{i+1} 在平面 $x_i = 0$ 的交点为 $p_{i, i+1}$, 在平面 $x_{i+1} = 0$ 的交点为 $p_{i+1, i}$.

引理 4 若 $R_i, i \in \{1, 2, 3\}$ 沿 $\partial\Sigma$ 均为局部吸引子, 则系统(1)不存在直线段式奇点集.

证明 用反证法. 记 $l: \pi_2 \cap \pi_3$, 则 l 为一条过 p_1 的直线. 由于 π_2, π_3 为严格正向的, 故 l 必

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19771089)

收稿日期: 2000-03-28; 作者简介: 王远世 (1964-), 男, 副教授.

与正 x_1 轴、平面 R_1^+ 、平面 R_2^+ 三者之一相交. 不妨设 l 与 R_1^+ 相交于 p_{23} , 见图 2(a). 记 π_2 与正 x_3 轴的交点为 q . 如系统(1)有直线段式奇点集, 由 R_1 沿 $\partial\Sigma$ 为局部吸引子及 $f_1(p_{23}) = 0$ 知, $f_1(q) < 0$. 再由 $f_1(p_1) = 0$ 知, $f_1(R_2) > 0$, 与引理 2 矛盾. 类似可以证明 l 与 R_2^+ 相交的情形. 若 l 与正 x_1 轴相交于 p_{23} , 见图 2(b), 由 R_1 沿 $\partial\Sigma$ 为局部吸引子知, $f_1(p_{23}) > 0$. 如系统(1)有直线段式奇点集, 则 π_1 必通过 x_1 轴, 这与 π_1 为严格正向矛盾. 证毕.

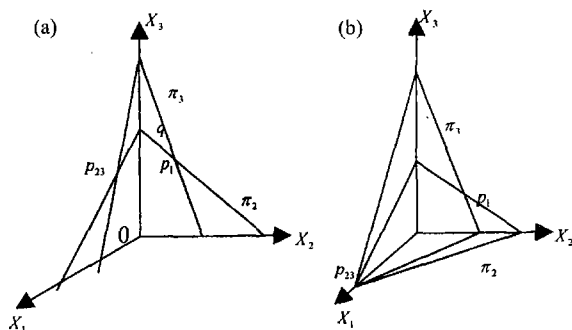


图2 平面的位置

Fig.2 Position of planes

2 主要结论及证明

引理 5 当 $R_i, i \in \{1, 2, 3\}$ 均为 Σ 上的局部吸引子时, 系统(1)存在正平衡点的充要条件是: 存在 $j, j \in \{1, 2, 3\}$, 满足: $f_j(p_j) < 0, f_j(p_{j+1, j+2}) > 0$, 当 $b_{j+1}/a_{j+1, j} > b_{j+2}/a_{j+2, j}$ 时; $f_j(p_j) < 0$, 当 $b_{j+1}/a_{j+1, j} = b_{j+2}/a_{j+2, j}$ 时; $f_j(p_j) < 0, f_j(p_{j+2, j+1}) > 0$, 当 $b_{j+1}/a_{j+1, j} < b_{j+2}/a_{j+2, j}$ 时.

证明 以下对 $j = 1$ 的情形给出证明, 类似可证明 $j = 2, 3$ 的情形.

记 $l: \pi_2 \cap \pi_3$, 则 l 为一条过 p_1 的直线. 由于 π_2, π_3 为严格正向的, 故 l 必与正 x_1 轴、平面 R_1^+ 、平面 R_2^+ 三者之一相交. 不妨设 l 与 R_1^+ 相交于 p_{23} , 即 $b_2/a_{21} > b_3/a_{31}$ 的情形, 见图 2(a). 此时易见系统(1)存在正平衡点的充要条件是 $f_1(p_1)f_1(p_{23}) < 0$. 若 $f_1(p_1) > 0, f_1(p_{23}) < 0$, 由 R_1 沿 $\partial\Sigma$ 为局部吸引子及 $f_1(p_{23}) < 0$ 知, $f_1(q) < 0$. 再由 $f_1(p_1) > 0$ 知, $f_1(R_2) > 0$, 与引理 2 矛盾. 故当 $b_2/a_{21} > b_3/a_{31}$ 时, 系统(1)存在正平衡点的充要条件是 $f_1(p_1) < 0, f_1(p_{23}) > 0$. 类似可以证明 l 与 R_2^+ 相交的情形. 若 l 与正 x_1 轴相交于 p_{23} , 见图 2(b), 此时 $b_2/a_{21} = b_3/a_{31}$. 由 R_1 沿 $\partial\Sigma$ 为局部吸引子知, $f_1(p_{23}) > 0$. 故系统(1)存在正平衡

点的充要条件是 $f_1(p_1) < 0$. 证毕.

定理 1 当 $R_i, i \in \{1, 2, 3\}$ 均为 Σ 上的局部吸引子时, 若存在 $j, j \in \{1, 2, 3\}$, 满足 $f_j(p_j) \geq 0$, 则 p_j 是 Σ 上的不稳定结点; 若存在 $j, j \in \{1, 2, 3\}$, 满足 $f_j(p_j) < 0$ 时, p_j 是 Σ 上的鞍点.

证明 以下对 $j = 1$ 的情形给出证明, 类似可证明 $j = 2, 3$ 的情形.

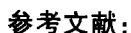
若 $f_1(p_1) > 0$, 由引理 5 知, 系统(1)无正平衡点. 此时, 在二维单纯形 Σ 上, p_1 沿 $\partial\Sigma$ 为局部排斥子, 又由 $f_1(p_1) > 0$ 知, 在 Σ 上 p_1 附近有 $x_1' > 0$, 故 p_1 在 Σ 上不稳定结点. 若 $f_1(p_1) < 0$, 则在 Σ 上 p_1 点附近有 $x_1' < 0$, p_1 点在 Σ 上存在稳定流形, 由 p_1 沿 $\partial\Sigma$ 为局部排斥子, 知 p_1 是 Σ 上的鞍点. 若 $f_1(p_1) = 0$, 由 $R_i, i \in \{1, 2, 3\}$ 沿 $\partial\Sigma$ 均为局部吸引子, 知必有 $f_2(p_2) < 0, f_3(p_3) < 0$, 即 p_2, p_3 是 Σ 上的鞍点. 此时系统(1)无正平衡点, 由文[2]的分类知, p_1 是 Σ 上的不稳定结点. 证毕.

由引理 5 及定理 1, 有以下定理 2.

定理 2 当 $R_i, i \in \{1, 2, 3\}$ 均为 Σ 上的局部吸引子时, 若存在 $j, j \in \{1, 2, 3\}$, 满足: 当 $b_{j+1}/a_{j+1, j} < b_{j+2}/a_{j+2, j}$ 时有 $f_j(p_j) < 0, f_j(p_{j+2, j+1}) > 0$, 或当 $b_{j+1}/a_{j+1, j} = b_{j+2}/a_{j+2, j}$ 时有 $f_j(p_j) < 0$, 或当 $b_{j+1}/a_{j+1, j} > b_{j+2}/a_{j+2, j}$ 时有 $f_j(p_j) < 0, f_j(p_{j+1, j+2}) > 0$, 则系统(1)存在唯一正平衡点, 除该点、原点及 3 条鞍点分界线外, $\text{int}R_+^3$ 中其它点出发的轨线的 ω 极限集必为集合 $\{R_1\}, \{R_2\}, \{R_3\}$ 三者之一, 如图 3 (b) 所示.

当 $R_i, i \in \{1, 2, 3\}$ 均为 Σ 上的局部吸引子时, 由引理 5、定理 1 和定理 2, 可以清楚地知道系统(1)的全局拓扑结构随参数变化的各种情况. 以下在引用引理 5、定理 1 和定理 2 讨论系统(1)的分支现象时, 设 $j = 1$. 类似地可以讨论 $j = 2, 3$ 情形. 兹给出 $j = 1$ 时的分支情况.

参数分布	拓扑结构
$b_2/a_{21} < b_3/a_{31}, f_1(p_1) \geq 0$	图 3(a)
$b_2/a_{21} < b_3/a_{31}, f_1(p_1) < 0, f_1(p_{23}) > 0$	图 3(b)
$b_2/a_{21} < b_3/a_{31}, f_1(p_1) < 0, f_1(p_{32}) \leq 0$	图 3(d)
$b_2/a_{21} = b_3/a_{31}, f_1(p_1) \geq 0$	图 3(a)
$b_2/a_{21} = b_3/a_{31}, f_1(p_1) < 0$	图 3(b)
$b_2/a_{21} > b_3/a_{31}, f_1(p_1) \geq 0$	图 3(a)
$b_2/a_{21} > b_3/a_{31}, f_1(p_1) < 0, f_1(p_{23}) > 0$	图 3(b)
$b_2/a_{21} > b_3/a_{31}, f_1(p_1) < 0, f_1(p_{32}) \leq 0$	图 3(c)



- [1] VAN DEN Driessche P, ZEEMAN M L. Three-dimensional competitive Lotka-Volterra systems with no periodic orbits [J]. SIAM J Appl Math, 1998, 58(1): 227 - 234.
- [2] HIRSCH M W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative III. Competing species [J]. Nonlinearity, 1988(1): 51 - 71.

The Asymptotic Behavior of 3-Dimensional Competitive Lotka-Volterra Systems

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Keywords: competitive Lotka-Volterra systems; local repeller; asymptotic behavior

本刊改版启事

为适应学校科研、教学发展,创办一流的高校学报,本刊从 2001 年起,改用大 16 开本出版,同时,封面设计和内文用纸也作相应改变.本刊期望在新世纪中,继续得到广大读者、作者的关心和爱护,我们将加倍努力,向社会奉献一份精品学报.

新世纪,新发展!