

高维非平稳双正交 Semi MRA 的一个充要条件

陈文胜¹, 周先波²

(1. 深圳大学理学院数学系, 广东 深圳 518060; 2. 中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 利用高维情形下的非平稳重分法来构造高维非平稳双正交 Semi MRA, 得到了生成非平稳双正交 Semi MRA 的一个充要条件.

关键词: 非平稳重分法; 双正交; Semi MRA; 尺度函数

中图分类号: O174.2 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2001) 03-0018-03

近年来, 人们对非平稳重分法的研究越来越重视^[1~3], 文 [1] 研究了高维非平稳重分法的收敛性及其极限函数性质, 本文构造高维非平稳双正交 Semi MRA, 研究其生成的充要条件. 本文拟采用如下多重标记号:

- ①多重指数指标 $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|m| := m_1 + \dots + m_d$;
- ② $x, y \in \mathbb{R}^d, x \circ y := \sum_{i=1}^d x_i y_i, \|x\| := (x \circ x)^{1/2}, x^m := \prod_{i=1}^d x_i^{m_i}$;
- ③多重导数 $D^m := (\partial^{m_1} / \partial x_1^{m_1}), \dots, (\partial^{m_d} / \partial x_d^{m_d})$;
- ④ $r_k := \prod_{i=1}^d [-r_k(i), r_k(i)] \cap \mathbb{Z}^d$, 其中 $k > 0, r_k(i) \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq i \leq d$;
- ⑤ $T^d := [-\pi, \pi]^d, E_d := \{\text{单位方体}[0, 1]^d \text{ 的 } 2^d \text{ 个顶点}\}$.

1 高维非平稳重分法

设 $\{h_k\}_{k>0}$ 是一组有限面具, 其对应的滤波函数为:

$$m_k(\omega) := \sum_{l \in r_k} h_k(l) e^{-il \cdot \omega} = \sum_{l_1=-r_k(1)}^{r_k(1)} \cdots \sum_{l_d=-r_k(d)}^{r_k(d)} h_k(l) e^{-il \cdot \omega}, \omega \in \mathbb{R}^d$$

在这组面具下的非平稳重分算法为:

$$f_j(2^{-j}k) = 2^d \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} h_j(k-2l) f_{j-1}(2^{-j+1}l), k \in \mathbb{Z}^d, j \geq 1 \tag{1}$$

引理 1 若非平稳重分算法 (1) 输入的初始序列为 Dirac 序列 $f_0(k) = \delta_{k,0}$, 则经过 n 步迭代得到的网格 $2^{-n}\mathbb{Z}^d$ 上的值能被函数 $\phi^{[n]}(x)$ 进行插值, 其中 $\phi^{[n]}(x)$ 为有限带宽函数, 满足

$$\phi^{[n]}(\omega) = \prod_{k=1}^n m_k(2^{-k}\omega) \circ \chi_{T^d}(2^{-n}\omega).$$

引理 2 如果 $\{m_k(\omega)\}_{k>0}$ 一致有界, $\sum_{k=1}^\infty |m_k(0) - 1| < +\infty$, 且 $\{r_k\}_{k \geq 1}$ 呈线性增长, 即对所有的 $1 \leq i \leq d, r_k(i) = \mathcal{O}(k)$, 则在任何紧集上 $\phi^{[n]}(\omega)$ 一致收敛到 $\varphi(\omega)$, $\phi^{[n]}(x)$ 在缓增分布意义下收敛到 $\varphi(x)$ 且

$$\text{supp } \varphi(x) \subseteq \prod_{i=1}^d [-L_i, L_i], L_i = \sum_{k>0} 2^{-k} r_k(i), i = 1, \dots, d.$$

引理 3 若引理 2 的条件成立, 此外还有 $|m_k(\omega)| \leq (1 + a_k) \circ |m(\omega)|^k$, 其中 $\sum_{k>0} a_k < \infty, m(\omega) := \prod_{i=1}^d \left[\cos \frac{\omega_i}{2} \right]^{\beta_i} \tilde{m}(\omega)$, β_i 为正实数.

而且 $\tilde{m}(\omega)$ 满足如下条件:

- ① $\tilde{m}(\omega)$ 有界, 且 $\tilde{m}(0) = 1$;
- ② $\tilde{m}(\omega)$ 在原点 Hölder 连续;
- ③ 对某个固定的 $\lambda > 0, \sigma_\lambda := \sup_{k=1}^\lambda \prod_{k=1}^\lambda$

$|\tilde{m}(2^{-k}\omega)| \leq 2^{\lambda k}, L := \min_{1 \leq i \leq d} \{\beta_i\}$; 则 $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 且对 $\forall m \in \mathbb{Z}^d, D^m \phi^{[n]}(x)$ 一致收敛到 $D^m \varphi(x)$.

* 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (990228); 深圳大学科研基金资助项目 (9909)
收稿日期: 2000-06-08; 作者简介: 陈文胜, 男 (1967-), 博士, 讲师.
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2 非平稳双正交 Semi-MRA

设 $\{h_k\}_{k \geq 0}$ 和 $\{\tilde{h}_k\}_{k \geq 0}$ 是两组有限面具, 其相应的滤波函数 $\{m_k(\omega)\}_{k \geq 0}$ 和 $\{\tilde{m}_k(\omega)\}_{k \geq 0}$ 都满足引理 3 的条件, 则可定义 $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ 函数 $\varphi_j(x)$ 和 $\tilde{\varphi}_j(x)$, 它们的 Fourier 变换如下:

$$\begin{aligned}\varphi_j(\omega) &= \prod_{k=1}^\infty m_{k+j}(2^{-k}\omega), \\ \tilde{\varphi}_j(\omega) &= \prod_{k=1}^\infty \tilde{m}_{k+j}(2^{-k}\omega)\end{aligned}\tag{2}$$

其中, $j \geq 0, \omega \in \mathbf{R}^d$. 因此, 由变换 (2) 有:

$$\begin{aligned}\varphi_j(\omega) &= m_{j+1}(\omega/2) \varphi_{j+1}(\omega/2), \\ \tilde{\varphi}_j(\omega) &= \tilde{m}_{j+1}(\omega/2) \tilde{\varphi}_{j+1}(\omega/2)\end{aligned}\tag{3}$$

从而, $\varphi_j(x)$ 和 $\tilde{\varphi}_j(x)$ 分别满足如下递归细分方程:

$$\varphi_j(x) = 2^d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} h_{j+1}(n) \varphi_{j+1}(2x - n)\tag{4}$$

$$\tilde{\varphi}_j(x) = 2^d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{h}_{j+1}(n) \tilde{\varphi}_{j+1}(2x - n)\tag{5}$$

两组 Semi-MRA $\{V_j\}_{j \geq 0}$ 和 $\{\tilde{V}_j\}_{j \geq 0}$ 可分别定义如下:

$$\begin{aligned}V_j &= \text{span}\{2^{jd/2} \varphi_j(2^j x - k)\}, \\ \tilde{V}_j &= \text{span}\{2^{jd/2} \tilde{\varphi}_j(2^j x - k)\}\end{aligned}\tag{6}$$

由方程 (4)、(5) 知:

$$V_j \subset V_{j+1}, \tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1}, (j \geq 0)$$

现在研究 $\{V_j\}_{j \geq 0}$ 和 $\{\tilde{V}_j\}_{j \geq 0}$ 在什么条件下能构成一组双正交的多分辨率分析. 为此记

$$\begin{aligned}\varphi_j^{[l, n]}(\omega) &:= \prod_{k=1}^n m_{k+j}(2^{-k}\omega) \circ \chi_{2^n T^d}(\omega), \\ \tilde{\varphi}_j^{[l, n]}(\omega) &:= \prod_{k=1}^n \tilde{m}_{k+j}(2^{-k}\omega) \circ \chi_{2^n T^d}(\omega)\end{aligned}$$

引理 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^d} |\tilde{\varphi}_j(\omega) \varphi_j(\omega) - \tilde{\varphi}_j^{[l, n]}(\omega) \varphi_j^{[l, n]}(\omega)| d\omega = 0$$

证明 类似于文 [1] 中引理 3 的证明, 知存在 $p, \tilde{p} \in \mathbf{N}$, 使得

$$\begin{aligned}s &:= b + p \left\lfloor \frac{\lg 2 \sigma_\lambda}{\lambda} - L \right\rfloor < -d/2, \\ \tilde{s} &:= \tilde{b} + \tilde{p} \left\lfloor \frac{\lg 2 \sigma_{\tilde{\lambda}}}{\lambda} - L \right\rfloor < -d/2\end{aligned}$$

且对任意的 $n \in \mathbf{N}, \omega \in \mathbf{R}^d$, 有

$$|\tilde{\varphi}_j^{[l, n]}(\omega) \varphi_j^{[l, n]}(\omega)| \leq K_p (1 + \|\omega\|)^s$$

$$|\tilde{\varphi}_j^{[l, n]}(\omega) \varphi_j^{[l, n]}(\omega)| \leq K_{\tilde{p}} (1 + \|\omega\|)^{\tilde{s}}\tag{7}$$

注意到不等式 (7) 对逐点极限 $\tilde{\varphi}_j(\omega)$ 和 $\varphi_j(\omega)$ 亦分别成立, 从而

$$\begin{aligned}&|\tilde{\varphi}_j^{[l, n]}(\omega) \varphi_j^{[l, n]}(\omega)| = \\&\prod_{k=1}^n |\bar{m}_{k+j}(2^{-k}\omega) \tilde{m}_{k+j}(2^{-k}\omega) \chi_{2^n T^d}(\omega)| \leq \\&A_{\tilde{p}} (1 + \|\omega\|)^{-d-\eta}, \\&|\tilde{\varphi}_j(\omega) \varphi_j(\omega)| = \\&\prod_{k=1}^\infty |\bar{m}_{k+j}(2^{-k}\omega) \tilde{m}_{k+j}(2^{-k}\omega)| \leq \\&A_{\tilde{p}} (1 + \|\omega\|)^{-d-\eta}, (\eta > 0)\end{aligned}$$

这表明 $\tilde{\varphi}_j(\omega) \varphi_j(\omega) \in L^1(\mathbf{R}^d)$. 所以, 对任给 $\varepsilon > 0$, 可选取 $G > 0$, 使得

$$\int_{\|\omega\| > G} (1 + \|\omega\|)^{-d-\eta} d\omega < \varepsilon / (2A_{\tilde{p}})$$

然后将引理中的积分折成 $I = \int_{\|\omega\| \leq G}$ 和 $II = \int_{\|\omega\| > G}$ 2 部分. 易见 I 一致收敛于零, 另一部分 $II \leq 2A_{\tilde{p}} \int_{\|\omega\| > G} (1 + \|\omega\|)^{-d-\eta} d\omega < \varepsilon$, 由此即得本引理.

定理 假设引理 3 的条件成立, 则 $\{V_j\}_{j \geq 0}$ 和 $\{\tilde{V}_j\}_{j \geq 0}$ 是双正交的充要条件为: 对 $\forall \omega \in \mathbf{R}^d, \forall j \geq 1$, 有

$$\sum_{\nu \in E_d} \bar{m}_j(\omega + \nu\pi) \tilde{m}_j(\omega + \nu\pi) = 1, \text{ a.e. }\tag{8}$$

证明 ($\Rightarrow$) 已知 $\{V_j\}_{j \geq 0}$ 和 $\{\tilde{V}_j\}_{j \geq 0}$ 双正交, 即对 $\forall k \in \mathbf{Z}^d, \forall j \geq 0$,

$$\begin{aligned}&\langle \tilde{\varphi}_j(\cdot) | \varphi_j(\cdot - k) \rangle = \\&(2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{\varphi}_j(\omega) \overline{\varphi_j(\omega)} e^{ik \cdot \omega} d\omega = \\&\sum_{n \in \mathbf{Z}^d} (2\pi)^{-d} \int_{2n\pi + [0, 2\pi]^d} \tilde{\varphi}_j(\omega) \overline{\varphi_j(\omega)} e^{ik \cdot \omega} d\omega = \\&(2\pi)^{-d} \int_{[0, 2\pi]^d} \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}^d} \tilde{\varphi}_j(\omega + 2n\pi) \circ \right. \\&\left. \overline{\varphi_j(\omega + 2n\pi)} \right) e^{ik \cdot \omega} d\omega\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^d} \tilde{\varphi}_j(\omega + 2n\pi) \overline{\varphi_j(\omega + 2n\pi)} = 1, \text{ a.e. }\tag{9}$$

又据 (3) 和 (9) 得:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^d} m_{j+1}(\omega/2 + n\pi) \overline{\varphi_{j+1}(\omega/2 + n\pi)} \circ$$

$$\overline{\tilde{m}_{j+1}(\omega/2 + n\pi) \varphi_j(\omega + 2n\pi)} = 1$$

即

$$\sum_{v \in E^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} m_{j+1}(\omega/2 + 2k\pi + v\pi) \varphi_{j+1}(\omega/2 + 2k\pi + v\pi) = 1$$

$$\overline{\tilde{m}_{j+1}(\omega/2 + 2k\pi + v\pi) \varphi_{j+1}(\omega/2 + 2k\pi + v\pi)} = 1$$

从而

$$\sum_{v \in E^d} m_{j+1}(\omega/2 + v\pi) \overline{\tilde{m}_{j+1}(\omega/2 + v\pi)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{j+1}(\omega/2 + 2k\pi + v\pi) \overline{\varphi_{j+1}(\omega/2 + 2k\pi + v\pi)} = 1$$

再由式 (9) 即得式 (8). ($\Leftarrow$) 已知式 (8) 成立, 则有

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j^{[n]}(x) \overline{\varphi_j^{[n]}(x-l)} dx = \\ (2\pi)^{-d} \int_{2^{-n}T^d} \varphi_j^{[n]}(\omega) \overline{\varphi_j^{[n]}(\omega)} e^{-il^* \omega} d\omega &= \\ (2\pi)^{-d} \int_{[0, 2^{-(n+1)\pi}]^d} \varphi_j^{[n]}(\omega) \overline{\varphi_j^{[n]}(\omega)} e^{-il^* \omega} d\omega &= \\ (2\pi)^{-d} \int_{[0, 2^n \pi]^d} \prod_{k=1}^{n-1} \tilde{m}_{k+j} \tilde{m}_{k+j} (2^{-k} \omega) e^{-il^* \omega} d\omega &= \\ \sum_{v \in E_d} (\tilde{m}_{n+j} \tilde{m}_{n+j}) (2^{-n} \omega + v\pi) d\omega &= \end{aligned}$$

$$(2\pi)^{-d} \int_{2^{n-1}T^d} \varphi_j^{[n-1]}(x) \overline{\varphi_j^{[n-1]}(\omega)} e^{-il^* \omega} d\omega =$$

$$I_{n-1} = \cdots = I_1 =$$

$$(2\pi)^{-d} \int_{2T^d} \varphi_j^{[1]}(x) \overline{\varphi_j^{[1]}(\omega)} e^{-il^* \omega} d\omega =$$

$$(2\pi)^{-d} \int_{[0, 2\pi]^d} e^{-il^* \omega} \sum_{v \in E_d} (\tilde{m}_{1+j} \tilde{m}_{1+j}) (2^{-1} \omega + v\pi) d\omega =$$

$$(2\pi)^{-d} \int_{[0, 2\pi]^d} e^{-il^* \omega} d\omega = \delta_{l,0}$$

$$(2\pi)^{-d} \int_{[0, 2\pi]^d} e^{-il^* \omega} d\omega = \delta_{l,0}$$

因此, 由引理 4 得:

$$\langle \varphi_j(\cdot) | \varphi_j(\cdot - l) \rangle =$$

$$(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(\omega) \overline{\varphi_j(\omega)} e^{il^* \omega} d\omega =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I_1 = \delta_{l,0}$$

参考文献:

- [1] CHEN W S. On the convergence of multidimensional nonstationary subdivision schemes[J]. *Applicable Analysis*, 1999, 72(1-2): 172-189.
- [2] DYN N, RON A. Multiresolution analysis by infinitely differentiable compactly supported functions[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1995(2): 15-20.
- [3] COHEN A, DYN N. Nonstationary subdivision schemes and multiresolution analysis[J]. *SIAM J Math Anal*, 1996, 27(6): 1745-1769.

A Sufficient and Necessary Condition of Multidimensional Nonstationary Biorthogonal Semi MRA

CHEN Wen sheng¹, ZHOU Xian bo²

(1. Department of Mathematics, Shenzhen University, Guangdong Shenzhen 518060, China;

2. Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The multidimensional nonstationary subdivision scheme is used to construct Nonstationary biorthogonal Semi MRA, and a sufficient and necessary condition to generate a nonstationary biorthogonal Semi MRA is obtained.

Keywords: nonstationary subdivision schemes; biorthogonal; Semi MRA; scaling function