

两方向具有循环双周期性的控制方程的解耦^{*}

高 磊, 刘济科

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 证明了应用 U 变换方法可使在两个方向上具有循环双周期特性的系统控制方程组解耦, 导出了解耦方程的基本形式, 所得结果可广泛应用于循环双周期系统的静力与动力分析.

关键词: U 变换; 双周期系统; 解耦

中图分类号: O342 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 04-0115-02

蔡承武^[1]首次提出了 U 变换方法, 该法的一个突出特点是能使具有周期性的系统控制方程解耦. 高磊等^[2]证明了利用 U 变换方法也可使具有循环双周期特性的运动方程组解耦, 并给出了解耦方程的基本形式. 本文将 U 变换方法进一步推广到在两个方向上具有循环双周期特性的结构系统的分析, 讨论了控制方程的解耦原理.

1 控制方程

若系统在两个方向上具有循环双周期性, 则其控制方程可简单表示为

$$\sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^N K_{(j,k)(u,v)} x_{(u,v)} + K^0 x_{(j,k)} = F_{(j,k)}$$

$$j = 1, 1 + p_1, 1 + 2p_1, \dots, 1 + (m-1)p_1,$$

$$k = 1, 1 + p_2, 1 + 2p_2, \dots, 1 + (n-1)p_2$$

$$\sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^N K_{(j,k)(u,v)} x_{(u,v)} = F_{(j,k)}$$

$$j \neq 1, 1 + p_1, 1 + 2p_1, \dots, 1 + (m-1)p_1,$$

$$\text{或 } k \neq 1, 1 + p_2, 1 + 2p_2, \dots, 1 + (n-1)p_2$$

$$j = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

式中各有关变量的物理意义参见文 [2], $M = mp_1$, $N = np_2$, $K_{(j,k)(u,v)}$ ($j, u = 1, 2, \dots, M; k, v = 1, 2, \dots, N$) 对 2 对下标 j, u 及 k, v 分别具有循环周期性.

记号 $x_{(-u,v)} \equiv x_{(M-u,v)}$, $x_{(u,-v)} \equiv x_{(u,N-v)}$, $x_{(-u,-v)} \equiv x_{(M-u,N-v)}$ ($u = 0, 1, 2, \dots, M; v = 0, 1, 2, \dots, N$) 代入 (1) 式, 可得

$$\sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N K_{(r,s)(1,1)} x_{(j-r+1,k-s+1)} +$$

$$K^0 x_{(j,k)} = F_{(j,k)}$$

$$j = 1, 1 + p_1, 1 + 2p_1, \dots, 1 + (m-1)p_1$$

$$k = 1, 1 + p_2, 1 + 2p_2, \dots, 1 + (n-1)p_2$$

$$\sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N K_{(r,s)(1,1)} x_{(j-r+1,k-s+1)} = F_{(j,k)}$$

$$j \neq 1, 1 + p_1, 1 + 2p_1, \dots, 1 + (m-1)p_1,$$

$$\text{或 } k \neq 1, 1 + p_2, 1 + 2p_2, \dots, 1 + (n-1)p_2$$

$$j = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

2 控制方程的解耦

对 (2) 式进行双 U 变换^[1]

$$x_{(j,k)} = \frac{1}{\sqrt{M}\sqrt{N}} \sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^N e^{i(j-1)\psi_1} e^{i(k-1)\psi_2} q_{(u,v)},$$

$$j = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

$$q_{(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{M}\sqrt{N}} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N e^{-i(j-1)\psi_1} e^{-i(k-1)\psi_2} x_{(j,k)}$$

$$u = 1, 2, \dots, M; v = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

其中, $\psi_1 = 2\pi/M$, $\psi_2 = 2\pi/N$, 可得

$$a_{(u,v)} q_{(u,v)} = f'_{(u,v)} f^0_{(u,v)} \quad (5)$$

其中

$$a_{(u,v)} = \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N e^{-i(r-1)\psi_1} e^{-i(s-1)\psi_2} K_{(r,s)(1,1)},$$

$$f'_{(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{M}\sqrt{N}} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N e^{-i(j-1)\psi_1} e^{-i(k-1)\psi_2} F_{(j,k)}$$

$$f^0_{(u,v)} = -\frac{K^0}{\sqrt{M}\sqrt{N}} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N$$

$$e^{-i(r-1)p_1\psi_1} e^{-i(s-1)p_2\psi_2} x_{(1+(r-1)p_1, 1+(s-1)p_2)} \quad (6)$$

由方程 (5) 可得

$$q_{(u,v)} = a_{(u,v)}^{-1} (f'_{(u,v)} + f^0_{(u,v)})$$

对其进行双 U 变换得

$$x_{(j,k)} = x'_{(j,k)} + x^0_{(j,k)} \quad (7)$$

其中, $x'_{(j,k)}$ 表示 $K^0 = 0$ 时方程 (1) 的解, $x^0_{(j,k)}$ 则

* 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (001180); 中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (01M4)

收稿日期: 2000-10-19; 作者简介: 高 磊 (1967-), 女, 助理研究员.

表示 K^0 对解 $x_{(j,k)}$ 的影响.

在(7)式中令 $X_{(j,k)} \equiv x_{(1+(j-1)p_1, 1+(k-1)p_2)}$,
 $X'_{(j,k)} \equiv x'_{(1+(j-1)p_1, 1+(k-1)p_2)}$ 得

$$X_{(j,k)} + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^n \beta_{(j,k)(r,s)} X_{(r,s)} = X'_{(j,k)} \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$$

$$\beta_{(j,k)(r,s)} = \frac{1}{MN} \sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^N e^{i(j-r)u\varphi_1} e^{i(k-s)v\varphi_2} a_{(u,v)}^{-1} K^0 \quad (9)$$

其中, $\varphi_1 = p_1 \psi_1 = 2\pi/m$, $\varphi_2 = p_2 \psi_2 = 2\pi/n$.

很明显, $\beta_{(j,k)(r,s)}$ ($j, r = 1, 2, \dots, m; k, s = 1, 2, \dots, n$) 对 2 对下标 j, r 及 k, s 具有循环周期性. (8) 式为在两个方向上具有循环单周期性的方程组, 可用双 U 变换使其解耦. 令

$$X_{(j,k)} = \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{n}} \sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^n e^{i(j-1)u\varphi_1} e^{i(k-1)v\varphi_2} Q_{(u,v)}, \quad (10)$$

$$j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$$

$$Q_{(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{n}} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n e^{-i(j-1)u\varphi_1} e^{-i(k-1)v\varphi_2} X_{(j,k)},$$

$$u = 1, 2, \dots, m; v = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

用 $\frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{n}} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n e^{-i(j-1)u\varphi_1} e^{-i(k-1)v\varphi_2}$ 前乘 (8) 式两边得

$$A_{(u,v)} Q_{(u,v)} = b_{(u,v)},$$

$$u = 1, 2, \dots, m; v = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

其中

$$A_{(u,v)} = I +$$

$$\frac{1}{p_1 p_2} \left(\sum_{r=1}^{p_1} \sum_{s=1}^{p_2} a_{(u+(r-1)m, v+(s-1)n)}^{-1} \right) K^0 \quad (13)$$

可见, 通过 2 次双 U 变换, 可将含有 $M \times N$ 个未知矢量的循环双周期方程 (1) 解耦成一组独立方程, 即方程 (12), 而每个独立方程仅含一个未知矢量. 比较 (6) 和 (11) 式, 得

$$f_{(u+(r-1)m, v+(s-1)n)}^0 = - \frac{1}{\sqrt{p_1} \sqrt{p_2}} K^0 Q_{(u,v)}$$

$$u = 1, 2, \dots, m; v = 1, 2, \dots, n;$$

$$r = 1, 2, \dots, p_1; s = 1, 2, \dots, p_2 \quad (14)$$

于是, 给定方程 (1) 中的参数, 由以上推得的有关方程 (14), (6), (7), (4) 可求得 $x_{(j,k)}$.

致谢: 感谢蔡承武教授、陈树辉教授的指导.

参考文献:

- [1] CAI C W, CHEUNG Y K, CHAN H C. Uncoupling of dynamic equations for periodic structures[J]. J Sound and Vibration, 1990, 139(2): 253-263.
- [2] 高磊, 刘济科. 循环双周期系统控制方程的解耦[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2000, 39 (增刊 2): 6-8.

Uncoupling of Governing Equations for Cyclic Bi-periodic Structures in Two Directions

GAO Lei, LIU Ji-ke

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: It is proved that applying the U-transformation method it is possible for the linear simultaneous equations to be uncoupled, either in terms of algebraic or differential equations, with cyclic bi-periodicity properties in two directions. The uncoupled equations are mathematically formulated. The result can be easily used to obtain the solutions for static and dynamic analyses of bi-periodic structures in two directions.

Keywords: U-transformation; bi-periodic structures; uncoupling