

给定行和与列和的 $(0, 1, 2)$ - 矩阵*

侯素梅¹, 孙群燕²

(1. 广东工业大学应用数学系, 广东 广州 510090; 2. 中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 设 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 是所有具有指定行和向量 R 与列和向量 S 的 $(0, 1, 2)$ - 矩阵组成的集合. 给出 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 中存在不可约矩阵的 2 个必要条件, 得到了 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 的一些性质.

关键词: $(0, 1, 2)$ - 矩阵; $\mathcal{B}_2(R, S)$; 结构矩阵; 不可约矩阵; (hk, pq) - 变换

中图分类号: O151.21 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579(2001)04-0117-03

设 r 是正整数, 如果矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, r\}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), 则称 A 是一个 $(0, 1, \dots, r)$ - 矩阵. 设 $R = (r_1, \dots, r_m)$ 和 $S = (s_1, \dots, s_n)$ 是非负整向量, 所有具有指定行和向量 R 与列和向量 S 的 $(0, 1, \dots, r)$ - 矩阵组成的集合记为 $\mathcal{B}_r(R, S)$ [1].

设 A 是 n 阶方阵, 如果存在置换矩阵 P , 使得

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

其中, A_{11} 和 A_{22} 是阶不小于 1 的方阵, 则称 A 是可约的. 否则, 称 A 是不可约的 [2].

Mirsky [3] 给出了 $\mathcal{B}_r(R, S)$ 非空的充要条件, Brualdi [2] 给出了 $\mathcal{B}_1(R, S)$ 中存在不可约矩阵的 3 个等价条件. 本文将给出 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 中存在不可约矩阵的 2 个必要条件, 得到了 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 的一些性质.

1 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 中的不可约矩阵

引理 [3] 设 $R = (r_1, \dots, r_m)$ 和 $S = (s_1, \dots, s_n)$ 是非负整向量, 且 $r_1 + \dots + r_m = s_1 + \dots + s_n$, 则 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 非空的充要条件是: 对任意集合 $K \subseteq \{1, \dots, m\}$ 和 $L \subseteq \{1, \dots, n\}$, 都有

$$t(K, L) = 2|K| + |L| + \sum_{i \in K} r_i - \sum_{j \in L} s_j \geq 0$$

其中, $|K|$ 和 $|L|$ 分别表示集合 K 和 L 中元素的个数.

记 $t_{kl} = \min\{t(K, L) \mid K \subseteq \{1, \dots, m\}, |K| = k, L \subseteq \{1, \dots, n\}, |L| = l\}$, 则称 $(m+1) \times (n+1)$ 矩阵 $T = (t_{kl})$ 是集合 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 的结构

矩阵.

推论 1 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 非空的充要条件是结构矩阵 $T \geq 0$.

定理 1 设 $R = (r_1, \dots, r_m)$ 和 $S = (s_1, \dots, s_n)$ 是非负整向量 ($n \geq 2$), 如果 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 中存在一个不可约矩阵, 则有

$$r_i > 0 \text{ 和 } s_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

且对 $\{1, \dots, n\}$ 的任意两个互不相交的非空子集 K 和 L , 都有 $t(K, L) > 0$.

证明 设 A 是 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 中的一个不可约矩阵, 则 A 中没有零行与零列, 因此

$$r_i > 0 \text{ 和 } s_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

因为 $\mathcal{B}_2(R, S) \neq \emptyset$, 所以对 $\{1, \dots, n\}$ 的任意两个互不相交的非空子集 K 和 L , 都有 $t(K, L) \geq 0$.

假设 $t(K, L) = 2|K| + |L| + \sum_{i \in K} r_i - \sum_{j \in L} s_j = 0$, 即 $\sum_{j \in L} s_j = \sum_{i \in K} r_i + 2|K| + |L|$. 因此, 存在一个置换矩阵 P , 使得

$$PAP^T = \begin{bmatrix} \overbrace{L} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2J & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \underbrace{K} \end{bmatrix}_K \quad (1)$$

其中, J 是元素全为 1 的矩阵.

由此推出 A 是可约的, 与 A 的不可约性矛盾. 所以 $t(K, L) > 0$.

定理 2 设 $R = (r_1, \dots, r_m)$ 和 $S = (s_1, \dots, s_n)$ 是非负整向量 ($n \geq 2$), $\mathcal{B}_2(R, S) \neq \emptyset$, K 和 L 是 $\{1, \dots, n\}$ 的任意两个互不相交的非空子集. 则 $t(K, L) > 0$ 的充要条件是

* 基金项目: 广东工业大学青年基金资助项目 (202041)

收稿日期: 2000-12-05; 作者简介: 侯素梅 (1966-), 女, 讲师.

$$\sum_{i=1}^k s_i < \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\}$$

其中, $k = 1, \dots, n-1$.

证明 必要性. 如果 $t(K, L) > 0$, 设 A 是 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 中的任一矩阵, $1 \leq k \leq n-1$, 则

$$A = k \left\{ \begin{array}{c|c} \overline{k} & \\ \hline \cdots & \end{array} \right\} \quad (2)$$

考虑矩阵 A 前 k 列元素的和, 则有

$$\sum_{i=1}^k s_i \leq \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\} \quad (3)$$

下面用反证法证明 (3) 式中的等号不成立. 假设存在某个数 $k, 1 \leq k \leq n-1$, 使得

$$\sum_{i=1}^k s_i = \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\} \quad (4)$$

那么对 $i = 1, \dots, k$, 都有 $r_i \leq 2k$. 否则, 存在某个数 $i, 1 \leq i \leq k$, 使得 $r_i > 2k$. 由 (2) 式, 则有 $\sum_{i=1}^k s_i$

$< \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\}$, 与假设 (4) 矛盾.

令 $K = \{i \mid r_i \geq 2k, k \leq i \leq n\}$, 因为 R 和 S 是正整向量, 所以 $K \neq \emptyset$. 否则, $K = \emptyset$, 那么对一切 $i = 1, \dots, n$, 都有 $r_i < 2k$, 此时条件 (4) 成为 $\sum_{i=1}^k s_i = \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\} = \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n r_i = \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n s_i$, 由假设 $1 \leq k \leq n-1$, 与 $s_n > 0$ 矛盾.

记 $L = \{1, \dots, k\}$, 则 $|L| = k$ 且 $K \cap L = \emptyset$, 于是

$$t(K, L) = 2|K||L| + \sum_{i \in K} r_i - \sum_{i \in L} s_j = (2k|K| + \sum_{i \in K} r_i) - \sum_{i \in L} s_j =$$

$$\left(\sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\} + \sum_{i=1}^k r_i \right) - \sum_{j=1}^k s_j = 0$$

与已知 $t(K, L) > 0$ 矛盾. 因此条件 (4) 不成立,

所以 $\sum_{i=1}^k s_i < \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\}$

充分性 如果 $\sum_{i=1}^k s_i < \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\}, k = 1, \dots, n-1$. 因为 $\mathcal{B}_2(R, S) \neq \emptyset$, 所以 $t(K, L) \geq 0$.

仍用反证法证明 $t(K, L) > 0$. 设 A 是 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 中的任一矩阵, 假设存在某两个互不相交的非空子集 K 和 L , 使得

$$t(K, L) = 2|K||L| + \sum_{i \in K} r_i - \sum_{j \in L} s_j = 0 \quad (5)$$

即 $\sum_{j \in L} s_j = \sum_{i \in K} r_i + 2|K||L|$. 因此存在置换矩阵 P , 使得

$$PAP^T = \left[\begin{array}{c|c|c} \overline{L} & & \\ \hline & O & O \\ \hline \overline{2J} & & \end{array} \right] K \quad (6)$$

因为 $K \cap L = \emptyset$, 所以 (6) 式成为

$$PAP^T = \left[\begin{array}{c|c|c} \overline{L} & & \\ \hline & O & O \\ \hline \overline{K} & \overline{2J} & \end{array} \right] K \quad (7)$$

记 $|L| = k$, 考虑 (7) 式前 k 列元素的和, 则有

$$\sum_{i=1}^k s_i = \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\}$$

与已知矛盾. 所以 $t(K, L) > 0$.

由定理 1 和定理 2, 显然有

定理 3 设 $R = (r_1, \dots, r_n)$ 和 $S = (s_1, \dots, s_n)$ 是非负整向量 ($n \geq 2$), 如果 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 中存在一个不可约矩阵, 则有 $r_i > 0$ 和 $s_i > 0, (i = 1, \dots, n)$, 且

$$\sum_{i=1}^k s_i < \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\}$$

其中, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

值得注意的是, 定理 2 和定理 3 的逆命题不成立. 例如 $R = S = (1, 2)$, 则 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 中所有的 $(0, 1, 2)$ -矩阵是

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 1$ 时, 显然有 $s_1 < r_1 + \min\{2k, r_2\}$. 但矩阵 C_1 与 C_2 都是可约的. 与定理 2 的证明类似, 可推得以下结论:

推论 2 设 $R = (r_1, \dots, r_n)$ 和 $S = (s_1, \dots, s_n)$ 是正整向量 ($n \geq 2$), 且 R 是单调递减的. 如果 $\mathcal{B}_2(R, S) \neq \emptyset$, 则

$$\sum_{i=1}^k s_i < \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n \min\{2k, r_i\}$$

其中, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

2 $\mathcal{B}_2(R, S)$ 的其他一些性质

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, h, k, p 和 q 是正整数, 且满足 $1 \leq h < k \leq m, 1 \leq p < q \leq n$. 如果在矩阵 A 的第 h, k 行以及第 p, q 列的位置上加上一个 2×2 子阵

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

得到的矩阵 A' 与 A 仍有相同的行和与列和, 称这种变换为 (hk, pq) -变换^[1].

设 A 是一个 $(0, 1, 2)$ -矩阵, 记 $\rho(A)^{[4]}$ 是矩阵 A 中元素 1 的个数. 显然有

定理 4 如果 A 和 A^* 是 $\mathcal{Z}_2(R, S)$ 中的任意 2 个 $(0, 1, 2)$ -矩阵, 那么总是存在一系列的 (hk, pq) -变换把矩阵 A 变为 A^* , 且中间变换所得的矩阵仍是 $\mathcal{Z}_2(R, S)$ 中的 $(0, 1, 2)$ -矩阵.

定理 5 对 $(0, 1, 2)$ -矩阵 A 作一次 (hk, pq) -变换后变成另一个 $(0, 1, 2)$ -矩阵 A , 则变换前后矩阵中 1 的个数仅改变 0、 ± 2 或 ± 4 个(其中“+”表示增加,“-”表示减少).

$$\text{证明 设 } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (8)$$

是 $(0, 1, 2)$ -矩阵 A 的任一可进行 (hk, pq) -变换的子块. 记 ρ 是子块中奇元素 1 的个数. 对子块 (8) 作一次 (hk, pq) -变换后成为

$$\begin{bmatrix} a-1 & b+1 \\ c+1 & d-1 \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} a+1 & b-1 \\ c-1 & d+1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

相应地, A 变成另一个 $(0, 1, 2)$ -矩阵 A' . 记 ρ' 是变换后子块 (9) 中奇元素 1 的个数. 则变换前矩阵中奇元素 1 的个数改变了 $\rho(A') - \rho(A) = \rho' - \rho$.

$$\text{考虑子块 } \begin{bmatrix} a-1 & b+1 \\ c+1 & d-1 \end{bmatrix}$$

情形 1: $\rho = 0$, 则 (8) 中 a, b, c, d 都是偶数 0 或者 2. 因此 $a-1, b+1, c+1, d-1$ 都是奇数 1, 此时 $\rho' = 4, \rho' - \rho = 4$.

情形 2: $\rho = 1$, 不妨设 $a = 1, b, c, d$ 是偶数 0

或者 2. 此时 $\rho' = 3, \rho' - \rho = 2$.

情形 3: $\rho = 2$, 不妨设 $a = b = 1, c, d$ 是偶数 0 或者 2. 此时 $\rho' = 2, \rho' - \rho = 0$.

情形 4: $\rho = 3$, 不妨设 $a = b = c = 1, d$ 是偶数 2. 此时 $\rho' = 1, \rho' - \rho = -2$.

情形 5: $\rho = 4$, 此时 $a = b = c = d = 1, \rho' = 0, \rho' - \rho = -4$.

$$\text{对于 } \begin{bmatrix} a+1 & b-1 \\ c-1 & d+1 \end{bmatrix},$$

用同样的方法可得到上述结果. 因此, (hk, pq) -变换前后矩阵中奇元素 1 的个数改变了 0、 ± 2 、或者 ± 4 个.

定理 6 设 λ 和 v 分别是 $\mathcal{Z}_2(R, S)$ 中向量 R 和 S 的奇分量个数, A 是 $\mathcal{Z}_2(R, S)$ 中的任一 $(0, 1, 2)$ -矩阵, 则

$$\rho(A) \equiv \lambda \equiv v \pmod{2}.$$

证明 因为矩阵 A 中的每一个奇元素 1 分别为 $\rho(A), \lambda$ 和 v 各提供一个增量 1, 所以它们的奇偶性总是一致的, 因此 $\rho(A) \equiv \lambda \equiv v \pmod{2}$.

参考文献:

- [1] BRUALDI R A, MICHAEL T S. The class of matrices of zeros, ones and twos with prescribed row and column sums [J]. Linear Algebra Appl, 1989, 114/115: 181-198.
- [2] BRUALDI R A. Matrices of zeros and ones with fixed row and column sum vectors [J]. Linear Algebra Appl, 1980, 33: 159-231.
- [3] MIRSKY L. Transversal theory [M]. New York: Academic Press, 1971. 203-206.
- [4] HOU S M. The relationship between the class $\mathcal{Z}_2(R, S)$ of $(0, 1, 2)$ -matrices and the collection of constellation matrices [J]. Linear Algebra Appl, 1999, 290: 49-59.

$(0, 1, 2)$ -Matrices with Prescribed Row and Column Sums

HOU Su-mei¹, SUN Qun-yan²

(1. Department of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China;

2. Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Let $\mathcal{Z}_2(R, S)$ be the class of all $(0, 1, 2)$ -matrices with a prescribed row sum vector R and column sum vector S . Two necessary conditions for the existence of an irreducible matrix in $\mathcal{Z}_2(R, S)$ are given, and some characterization results for $\mathcal{Z}_2(R, S)$ are obtained.

Keywords: $(0, 1, 2)$ -matrix; $\mathcal{Z}_2(R, S)$; structure matrix; irreducible matrix; (hk, pq) -interchange