

使用 Pade 近似式处理数字控制系统中的纯滞后*

吕志民, 周茂林

(中山大学电子与通信工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 针对使用改进 z 变换处理数字控制系统中的纯滞后, 需要查表和进行繁杂的数学运算, 提出在 MATLAB 的环境下, 使用 Pade 近似式拟合纯滞后因子, 和不带滞后的被控对象串联组合、离散化, 结果有较高的精确度。仿真证明此方法的正确性与实用性。

关键词: Pade 近似; 纯滞后; 数字控制; 仿真

中图分类号: TP217.82; TP273.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 01-0114-02

数字控制系统中被控对象往往带有纯滞后, 如果纯滞后时间不是采样周期的整数倍, 普通 z 变换不能表达该对象^[1]。引入改进 z 变换, 把纯滞后时间 λ 分为含采样周期最大整数倍 N 和小于采样周期的滞后时间 τ , 指数函数 $e^{-\lambda Ts}$ 在 z 变换中成了滞后因子 z^{-N} , 通过查改进 z 变换表, 可把带滞后因子 $e^{-(1-\tau/T)Ts}$ 的被控对象脉冲传递函数确定。上述过程涉及大量的数学运算, 而且查表过程限制此方法难以在计算机辅助设计中应用。

为了使带纯滞后被控对象的数字控制系统设计简单化和自动化, 本文介绍借助 MATLAB 语言的 CASC^[2], 使用 Pade 近似式表示纯滞后因子, 用系统串联和模型转换命令, 导出广义被控对象, 数学运算由软件自动完成, 提高设计过程的速度与可靠性。仿真结果表明此方法的正确性。

1 使用 Pade 近似式离散建模原理

法国数学家 Padé 提出著名有理近似公式, 可把纯滞后环节 $e^{-\lambda s}$ 近似表为有理函数连续系统中, 带纯滞后对象的传递函数一般可表为

$$e^{-\lambda s} = \frac{1 - \frac{1}{2}(\lambda s) + \frac{5}{44}(\lambda s)^2 - \frac{1}{66}(\lambda s)^3 + \dots}{1 + \frac{1}{2}(\lambda s) + \frac{5}{44}(\lambda s)^2 + \frac{1}{66}(\lambda s)^3 + \dots} \quad (1)$$

连续系统中, 带纯滞后对象的传递函数一般可表示为

$$G(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s_{m-1} + \dots + b_{m+1}}{a_1 s^n + a_2 s_{n-1} + \dots + a_{n+1}} e^{-\lambda s} = \frac{\text{num } 1}{\text{den } 1} e^{-\lambda s} = G_0(s) e^{-\lambda s} \quad (2)$$

其中, $n \geq m$, $G_0(s)$ 为不带滞后因子的传递函数。使用 MATLAB 控制系统工具箱中的 pade 函数^[3], 选取近似拟合阶数 n 后, 可导出 $e^{-\lambda s}$ 的

近似表达式, 其调用格式为

$$[\text{num2}, \text{den2}] = \text{pade}(\lambda, n) \quad (3)$$

上述命令以传递函数模型返回, 也可以状态空间表达式模型返回。

使用 series 命令, 将 $G_0(s)$ 与 $e^{-\lambda s}$ 环节串联连接, 其格式为

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{series}(\text{num1}, \text{den1}, \text{num2}, \text{den2}) \quad (4)$$

将串联后连续系统传递函数模型按零阶保持离散化, 确定采样周期 T 后, 导出广义被控对象脉冲传递函数 $G_d(z)$, 其有理式为

$$[\text{dnum}, \text{dden}] = \text{c2dm}(\text{num}, \text{den}, T, 'zoh') \quad (5)$$

$$G_d(z) = \frac{\text{dnum}}{\text{dden}} \quad (6)$$

至此, 连续系统带纯滞后被控对象的离散模型唯一确定。

2 带纯滞后对象模型离散化与仿真

设连续系统带纯滞后对象传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{e^{-0.76s}}{s(0.4s + 1)} \quad (7)$$

采样周期 $T = 0.5$ s, 在零阶保持下将连续对象离散化。

2.1 改进 z 变换法 对象纯滞后时间 $\lambda = NT + \tau = 0.76$, 即 $N = 1, \tau = 0.26, m = 1 - \tau/T = 0.48$, 零阶保持下广义被控对象脉冲传递函数为

$$G_d(z, m) = (1 - z^{-1})z^{-1}Z\left[\frac{2.5e^{-0.48Ts}}{s^2(s + 2.5)}\right] = \frac{0.06(z^2 + 4.43z + 0.52)}{z^2(z^2 - 1.2865z + 0.2865)} \quad (8)$$

在单位脉冲序列作用下, 理论计算离散对象输出前 8 个采样值如表 1。

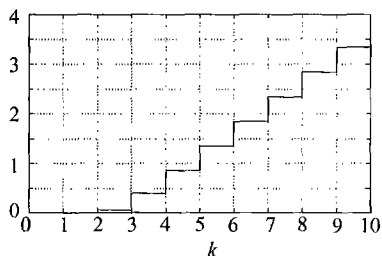
使用 Simulink 工具箱对该对象进行数字仿

* 收稿日期: 2000-04-14; 作者简介: 吕志民 (1946-), 男, 副教授。

表 1 改进 z 变换法离散对象输出采样值Tab.1 The sampled data of discrete object output to the modified z -transform method

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$y(k)$	0	0	0.06	0.4028	0.8554	1.3365	1.8227	2.3071

真^[3],单位阶跃输入下,系统输出特性曲线如图 1 所示。

图 1 改进 z 变换法下系统输出特性曲线Fig.1 The characteristic curve of system output to modified z -transform method

2.2 用 Pade 近似法 设近似拟合阶数为 4,调用 Pade 函数,求得纯滞后因子近似有理分式 $D(s)$ 。

$$[\text{num1}, \text{den1}] = \text{pade}(0.76, 4) \quad (9)$$

$$D(s) = \frac{\text{num1}}{\text{den1}} =$$

$$\frac{s^4 - 26.3s^3 + 311.6s^2 - 1913.5s + 5035.6}{s^4 + 26.3s^3 + 311.6s^2 + 1913.5s + 5035.6} \quad (10)$$

不带滞后因子的被控对象传递函数为

$$G_0(s) = \frac{\text{num2}}{\text{den2}} = \frac{2.5}{s^2 + 2.5s} \quad (11)$$

使用式(4)将 $D(s)$ 与 $G_0(s)$ 两环节串联连接,用式(5)求得广义被控对象脉冲传递函数。

$$G_d(z) = \frac{\text{dnum}}{\text{dden}} = \frac{0.0027z^4 + 0.0546z^3 + 0.2742z^2 + 0.058z + 0.0034}{z^5 - 1.1872z^4 + 0.161z^3 + 0.0255z^2 + 0.0007z} \quad (12)$$

在单位脉冲序列作用下,理论计算离散对象输出前 8 个采样值如表 2。单位阶跃输入下,系统仿真输出特性曲线如图 2 所示。

表 2 Pade 近似法离散对象输出采样值

Tab.2 The sampled data of discrete object output to Pade approximation method

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$y(k)$	0	0	0.06	0.4029	0.8580	1.3452	1.8415	2.3404

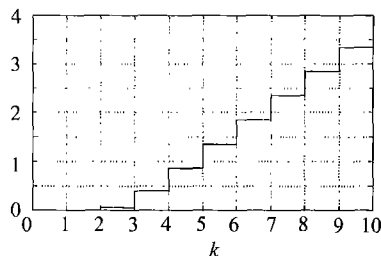


图 2 Pade 近似下系统输出特性曲线

Fig.2 The characteristic curve of system output to Pade approximation method

2.3 结果比较 两表对应项采样值比较,最大相对误差在 1.5% 以下。可见使用 Pade 近似方法处理数字控制系统的纯滞后,结果有较高的精确度。增加近似式拟合阶次,精确度会有所提高,但计算量会增大。两种方法理论计算和数字仿真曲线比较,结果都非常接近。

在 MATLAB 的环境下,使用 Pade 近似式处理数字控制系统中的纯滞后,其方法是实用的,拟合阶次选用 3~4 阶时,已获得相当满意的精确度。用该方法建立的离散模型,其幅频特性与拟合阶次无关,而相频特性的精确度随拟合阶次的增加而提高,随滞后时间的增大而下降。

参考文献:

- [1] DESHPANDE P B, ASH R H. Advanced control applications elements of computer process control with [M]. Instrument Society of America (North Carolina), 1981.
- [2] RIMVALL C M. Computer-aided control system design [J]. IEEE Control Systems Magazine (Special Issue on CACSD), 1993, 13: 14-16.
- [3] MOSCINSKI J. Advanced control with MATLAB and SIMULINK [M]. Ellis Horwood Limited, 1995.

Manipulation of the Pure Time Delay in Digital Control System Applying Pade Approximation

LÜ Zhi-min, ZHOU Mao-lin

(Department of Electronics and Communication Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A method of applying Pade approximation based on Matlab to treat the pure time delay in digital control system is presented. Simulation show that the fit result is accurate and the method is correct.

Keywords: Pade approximation; pure time delay; digital control; simulation