

三维紧身内衣的压力分布计算模型^{*}

罗笑南¹, 曾 龙², 聂 卉¹

(中山大学计算机应用研究所, 广东 广州 510275)

摘 要: 基于弹性力学上的薄膜大变形理论, 针对三维着装紧身内衣对人体的压力分布的计算问题, 提出了一类可实际操作的计算模型, 并给出相应的算法. 解决了服装 CAD 系统的受力试衣效果表示问题. 该模型计算稳定可靠, 计算结果能实时在计算机上显示.

关键词: 主曲率; 应力; 应变

中图分类号: O29; TP391.7 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2001) 06-0099-03

在智能化的服装 CAD 系统中, 三维试衣功能必不可少. 从服装功效性及舒适性的角度考虑, 试衣功能在展示三维服装造型的同时, 还能够示意着装后服装对人体的压力分布以及人体表面温度的变化. 对于该问题的研究, 涉及到弹性力学的变形理论, 目前刚起步. 本文针对紧身内衣着装后对人体的压力分布的计算问题, 提出了一个可行的计算模型. 该模型以弹性力学的薄膜大变形理论为基础^[1], 通过求解变形后内衣上一系列点上的应力, 再根据弹性力学的最小位能原理, 采用拉格朗日乘数法, 计算出弹性内衣对人体的压力.

对问题可理解为已知内衣和人体模型, 即已知内衣和人体的外形几何信息, 内衣的材料性能, 以及内衣边界的着装位置, 求着装后内衣对人体的压力分布. 首先, 将弹性内衣拉伸至人体的着装部位, 其外形与着装部位的外形吻合, 求此时内衣上各点的应力. 然后, 由于内衣被拉伸, 其对人体的结构点产生压力, 方向沿接触面的法线方向, 计算此时人体的结构点所承受的压力.

1 薄膜大变形的受力计算

本文把人体当作刚体, 内衣从自然状态变形到紧贴人体的着装部位, 计算内衣上任一点 A' 的应力 P_n . 如图 1, 给出内衣变形前的状态和变形后的状态.

曲面方程以柱坐标形式给出, 则内衣变形前后的曲面方程分别表示为

$$\begin{cases} \rho = \rho(\theta, z) \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq z < h \end{cases} \quad \begin{cases} r = r(\varphi, Z) \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq Z < h \end{cases}$$

其中, h 为人体高度.

如图 1 所示, 在内衣的变形过程中, 点 A 变形至点 A' , 相应地, 过点 A 的面元 $dsdl$ 变形为过点 A' 的面元 $dSdL$. 记

$$\rho'_z = \frac{\partial \rho}{\partial z}, r'_z = \frac{\partial r}{\partial Z}$$

由几何关系^[2], 得到下面的关系式:

$$\begin{cases} ds = [(\rho')^2 + (dz)^2]^{1/2} = [1 + \rho'^2_z]^{1/2} dz \\ dl = \rho(\theta, z) d\theta \\ dS = [(dr)^2 + (dZ)^2]^{1/2} = [1 + r'^2_Z]^{1/2} dZ \\ dL = r(\varphi, Z) d\varphi \end{cases}$$

于是, 设 A 处 2 个方向的伸长比率为 λ_1, λ_2 , 通过上式可以得到

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{dS - ds}{ds} = \left(\frac{1 + r'^2_Z}{1 + \rho'^2_z} \right)^{1/2} \frac{dZ}{dz} - 1 \\ \lambda_2 &= \frac{dL - dl}{dl} = \frac{r(\varphi, Z)}{\rho(\theta, z)} - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

下面求曲面在点 A' 处的主曲率 k_1, k_2 , 记

$$\begin{aligned} r'_s &= \frac{dr}{ds}, r''_s = \frac{d^2 r}{ds^2}, r''_z = \frac{d^2 r}{dZ^2} \\ k_1 &= \pm \frac{d\alpha}{ds} \approx \pm \frac{d^2 r}{ds^2 \sqrt{1 - r'^2_s}} \\ k_2 &= \frac{\sin \alpha}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{1 - r'^2_s} \end{aligned} \tag{2}$$

^{*} 收稿日期: 2001-03-01; 作者简介: 罗笑南 (1963—), 男, 教授, 博士生导师.

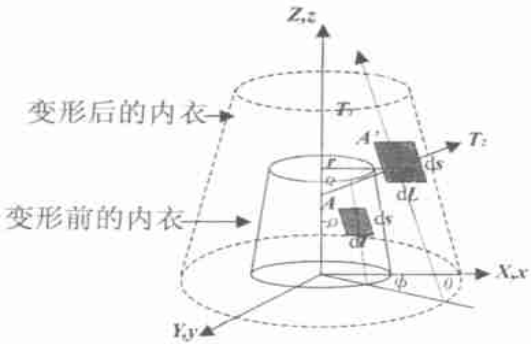


图 1 内衣形变前后的状态

Fig 1 The states of underwear before and after deformation

经过简单计算可得

$$\begin{aligned} r' s &= \frac{r' z}{\sqrt{1+r'^2 z^2}} \\ r'' s &= \frac{r'' z}{(1+r' z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{3}$$

由式 (2) 和 (3) 即可求得 k_1, k_2 .

下面根据弹性力学的本构方程和力的合成, 求取变形后内衣上点 A' 处的应力 $P^{[3,4]}$

$$P = k_1 T_1 + k_2 T_2 \tag{4}$$

其中, T_1, T_2 分别表示内衣沿 2 个拉伸方向的应力.

$$\begin{cases} T_1 = 2C_1 h \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left[1 + \frac{C_2}{C_1} \lambda_2^2 \right] \right\} \\ T_2 = 2C_1 h \left\{ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left[1 + \frac{C_2}{C_1} \lambda_1^2 \right] \right\} \end{cases} \tag{5}$$

C_1, C_2 分别表示内衣 2 个拉伸方向的弹性模量. P 及其坐标轴分量 P_x, P_y, P_z 将作为载荷转换计算的已知条件.

2 载荷转换计算

由上节, 可求得变形后内衣上一系列点 $\{A' i\}_{i=1}^n$ 处的应力, 记为

$$\{P^i\}_{i=1}^n$$

($\{A' i\}_{i=1}^n$ 表示变形后构成内衣的离散点列)

接下来的目的是计算在内衣应力 $\{P^i\}_{i=1}^n$ 的作用下, 人体的结构点 $\{B_j\}_{j=1}^m$ 所承受的压力 $\{P_j\}_{j=1}^m$, 其中, m 为人体结构点个数.

$P_j^i = (P_{x,j}^i, P_{y,j}^i, P_{z,j}^i)$ 表示在正向应力 P^i 的作用下, 结构点 B_j 所承受的压力. 于是

$$P_j = \sum_{i=1}^n P_j^i \tag{6}$$

考虑由内衣上的点 $A_j (j=1, 2, \dots, n)$ 的正

向应力 P^j 引起的人体上各结构点所承受的压力 P_j^i . 对 x 轴分量的情形 (y, z 情形类似), 如图 2 所示. 首先, 计算人体上 m 个被动网点 (即结构点) 所产生的弹性势能和. 简记 $P_{x,i} = P_{x,i}^j$, $P_x = P_x^j$, 有

$$E_x = \frac{1}{6IE} \sum_{i=1}^n P_{x,i}^2 l_i^3$$

其中, I 为截面惯性矩, E 为杨氏模量.

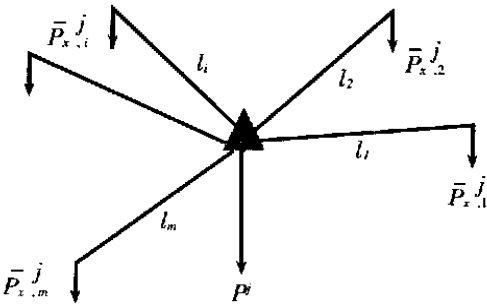


图 2 正向应力 P^j 引起的人体上各结构点所承受的压力 P_i^j (x 轴分量)

Fig 2 Pressure P_i^j (in x axis) on the structure points of human body resulted from the positive direction stress P^j

另外, $\{P_{x,i}\}_{i=1}^m$ 应满足平衡方程

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m P_{x,i} = P_x \\ \sum_{i=1}^m P_{x,i} \sqrt{y_i^2 + z_i^2} = P_x \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases} \tag{7}$$

其中, x_i, y_i, z_i 分别为结构点 B_i 的直角坐标分量, x, y, z 分别为参考点 $A' j$ 的直角坐标分量. 类似地, 考虑 y, z 轴分量的被动网点, 所产生的弹性势能和分别为:

$$E_y = \frac{1}{6IE} \sum_{i=1}^n P_{y,i}^2 l_i^3$$

$$E_z = \frac{1}{6IE} \sum_{i=1}^n P_{z,i}^2 l_i^3$$

平衡方程分别为:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m P_{y,i} = P_y \\ \sum_{i=1}^m P_{y,i} \sqrt{x_i^2 + z_i^2} = P_y \sqrt{x^2 + z^2} \\ \sum_{i=1}^m P_{z,i} = P_z \\ \sum_{i=1}^m P_{z,i} \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = P_z \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \tag{8}$$

被动网点产生的弹性势能总和

$$E = E_x + E_y + E_z$$

另外，根据弹性力学的最小位能原理^[3]，要达到平衡， E 应取极小值。从而问题转化为求 E 在方程 (7) 和 (8) 约束下的极值问题。可采用求解极值问题的拉格朗日乘数法计算求取。至此便得到了计算紧身内衣对人体压力分布的完整的计算模型。当考虑人体为弹性物体时，可采取迭代方式，利用上述模型计算出内衣对人体最终的压力分布。

这里，总结算法的基本流程。首先，计算变形后内衣上点 A_i 的应力 P^i 及其 3 个沿坐标轴 x, y, z 分量 $P_x, P_y, P_z, i = 0, 1, \cdots, n$ ，然后，对每个应力 P^i ，分别计算人体结构点 B_j 在 x, y, z 轴方向上所承受的压力 $P_{x,j}^i, P_{y,j}^i, P_{z,j}^i$ ，并计算 $P_j^i, j = 1, 2, \cdots, m$ ；最后，由式 (6) 计算内衣对结构点 B_j 的压力 P_j ，这样就得到了三维紧身内衣的压力分布。

3 结 论

本文结合弹性力学的薄膜大变形理论和载荷

转换计算方法，提出了一类可行的计算模型，很好地解决了集成三维服装 CAD 系统中的受力效果的表示问题。该模型计算简单，稳定可靠，是解决薄膜大变形的受力计算及其载荷转换计算的良好方案。在实际应用中，已得到证实。需特别指出，本文提出的计算模型基于标准的人体模型，对于一般的人体模型，或者特体模型的情形，将做进一步的研究。

参考文献：

[1] 高永祥, LEE P I. 轴对称膜大变形的一个新的理论模型[J]. 天津大学学报, 1987(5): 113—119.

[2] 孟道骥, 梁科. 微分几何[M]. 北京: 科学出版社, 1999. 17—22.

[3] BUFFER H. The biot stresses in nonlinear elasticity and the associated generalized variational principles[J]. Ing Arch, 1985, 55: 450—462.

[4] REISSNER E. Some aspects of the variational principles problem in elasticity [J]. Computational Mechanics, 1986(1): 3—9.

[5] REISSNER E. Note on the method of complementary energy[J]. J Math & Phys, 1948, 27: 159—160.

A Computable Model of Pressure Distribution
of Tight Underwear

LUO Xiao-Nan, ZENG Long, NIE Hui

(Institute of Computer Application, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Based on the theory of membrane of huge deformation in elasticity, a computable model is presented to solve the problem of pressure distribution between tight underwear and human body. With the help of this model, it is easy to solve the problem of describing wearing—dressed effect in Integrated Garments CAD system. This model is steady and reliable. The computed results of this model can be displayed real time.

Keywords: principal curvatures; stress; strain