

上凸密度函数与 Hausdorff 测度^{*} —— Sierpinski 垫片

何伟弘¹, 周作领²

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275; 2. 中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 主要讨论了 Sierpinski 垫片的上凸密度函数在其端点处的计算问题, 并通过具体的数值计算, 得出了在端点处的上凸密度函数不等于1的结论.

关键词: Sierpinski 垫片; Hausdorff 测度; 上凸密度

中图分类号: O174.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 01-0112-02

计算分形的 Hausdorff 测度是一个十分困难的问题, 包括较简单的自相似集, 如 Sierpinski 垫片^[1], 文 [2, 3] 等都只能给出一些上界. 本文考虑上凸密度与 Hausdorff 测度的关系, 证明 Sierpinski 垫片的顶点具有不等于1的上凸密度. 至今未见关于上凸密度估计的其它结果, 相关问题的深入研究对 Hausdorff 测度的估计与计算具有重要理论意义.

1 基本概念、已知结果和问题的提出

设 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, 定义 U 的直径为 $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$, 若 $\mathbf{R}^n$ 的子集 $E \subset \bigcup_i U_i$ 且对所有 $i, 0 < |U_i| \leq \delta$, 则称 $\{U_i\}$ 为 E 的 δ -覆盖. 设 s 是一个非负实数, 对 $\delta > 0$, 定义

$$H_\delta^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ 为 } E \text{ 的可数 } \delta\text{-覆盖}\right\}.$$

令 $\delta \rightarrow 0$, 定义

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E)$$

H^s 是一个外测度, 当被限制在其可测集所生成的 σ 域上时, 称为 s 维 Hausdorff 测度. $\mathbf{R}^n$ 的子集 E 称为 s -集 ($0 \leq s \leq n$), 如果 E 是 H^s -可测集且 $0 < H^s(E) < \infty$. 在文 [2] 第2章引进密度的概念, 表征了集合的局部测度. 由于任何一个集合均可包含在一个与它等直径的凸集中, 所以完全有理由更加关心 s -集在点 x 的上凸密度, 其定义为

$$\bar{D}_C^s(E, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sup \frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s} \right\}$$

这里是对所有包含 x 的满足 $0 < |U| \leq r$ 的凸集 U 取上确界.

引理 1^[1] 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个 s -集, 则对 H^s -几乎所有 $x \notin E, \bar{D}_C^s(E, x) = 0$; 且对 H^s -几乎所有 $x \in E, \bar{D}_C^s(E, x) = 1$.

这似乎能给出一个对 s -集的 Hausdorff 测度

进行估计的方法, 但据此只知道对几乎所有 $x \in E$, 有 $\bar{D}_C^s(E, x) = 1$, 而对某个具体的点, 则不清楚其上凸密度是否为1, 这就带来一个问题: $\{x \in E \mid \bar{D}_C^s(E, x) = 1\}$ 会是怎样的一个集合? 一般的情形难于处理, 对自相似集有否较确定的结论呢?

考虑具体的例子, 对 Cantor 三分集 C , 容易验证 $C = \{x \in C \mid \bar{D}_C^s(C, x) = 1\}$; 对 Sierpinski 垫片 S , 如果类似的结论成立, 即可得到一个计算 $H^s(S)$ 的公式. 事实上, 若 $S = \{x \in E \mid \bar{D}_C^s(E, x) = 1\}$ 成立, 则可特别地取 x 为顶点 A , 根据自相似集的性质及上凸密度函数的定义, 存在凸集 U (其直径 $|U|$ 可通过计算任意的逼近), 满足: $H^s(S \cap U) / |U|^s = 1$. 此外由于 $H^s(S \cap U) / |U|^s = 1$ 的值可计算得到, 故有

$$H^s(S) = \frac{H^s(S)}{H^s(S \cap U)} \cdot |U|^s \quad (1)$$

从而得出一个计算 S 的 Hausdorff 测度精确值的算法, 因此下述问题的提出与探讨, 有着重要的理论意义.

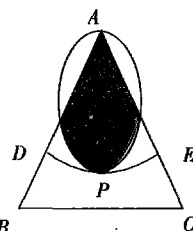
2 问题的讨论

问题 对 Sierpinski 垫片 S , 有否 $S = \{x \in S \mid \bar{D}_C^s(S, x) = 1\}$?

如上述, 取 x 为顶点 A , 考虑 $\bar{D}_C^s(S, x)$ 是否等于1, 设 V 为包含 A 点的任意凸集 (如右椭圆), 其直径 $|V| = r$, 设 U 是以 A 为圆心以 r 为半径的扇形, 则有引理2.

$$\text{引理 2} \quad \frac{H^s(S \cap U)}{|U|^s} \geq \frac{H^s(S \cap V)}{|V|^s}.$$

证明 显然 $|U| = |V| = r$, 故只需证 $S \cap V \subset S \cap U$. 对任意 $y \in S \cap V$, 由于 $|V| = r$,



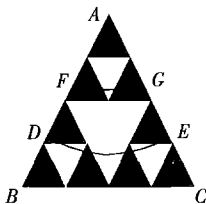
* 基金项目: 教育部博士点基金资助项目 (1999055810); 国家自然科学基金资助项目 (10041005); 中山大学高等学术研究中心资助项目

收稿日期: 2000-01-25; 作者简介: 何伟弘 (1968-), 男, 讲师.

所以 y 与 A 之间的距离不大于 r , 即 $y \in S \cap U$.

这样, 在讨论上凸集密度函数 $\bar{D}_C^s(S, x)$ 时, 可只考虑以 A 为中心的扇形簇. 下面的引理将进一步指出, 可把该扇形簇的半径限制在 $(1/2, 1]$ (设垫片的直径为 1).

引理 3 如右三角形, U 为扇形 ADE , 其半径为 r ; U' 为扇形 AFG , 其半径为 $r/2$. 则有 $\frac{H^s(S \cap U)}{|U|^s} = \frac{H^s(S \cap U')}{|U'|^s}$.



证明 由 Sierpinski 垫片的构造易知, 集合 $S \cap U'$ 与 $S \cap U$ 是几何相似的, 相似比为 $1/2$. 事实上, 当把坐标原点定于 A 点处, 显然有 $S \cap U' = (S \cap U)/2$. 于是,

$$\frac{H^s(S \cap U')}{|U'|^s} = \frac{H^s\left(\frac{1}{2}(S \cap U)\right)}{|U/2|^s} = \frac{(1/2)^s H^s(S \cap U)}{(1/2)^s |U|^s} = \frac{H^s(S \cap U)}{|U|^s}$$

证毕.

对任意的 $0 < r \leq 1$, 都可乘上 2 的某个幂次后使之位于 $(1/2, 1]$, 由引理 2 即可得

$$\bar{D}_C^s(S, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{H^s(S \cap U)}{|U|^s} = \sup_{r \in (1/2, 1]} \frac{H^s(S \cap U)}{|U|^s} \quad (2)$$

对 $r \in [1/2, 1]$, 仍设 U 是 A 为中心 r 为半径的扇形, 定义函数 $f: [1/2, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ 如下

$$f(r) = \frac{H^s(S \cap U)}{H^s(S)^s} \cdot \frac{1}{|U|^s} = \frac{H^s(S \cap U)}{H^s(S)^s} \cdot \frac{1}{r^s}$$

其中, $s = \log_2 3$ 是 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 维数. 易知 $f(r)$ 是连续的, 且由于 $H^s(S)$ 是常数, 故可知若 $f(r)$ 在 $r = r_0$ 处取得最大值, 则 (2) 式也在 $r = r_0$ 处取得上确界. 而 $f(r)$ 是可计算的.

下面简述 Sierpinski 垫片的构造, 取一边长为 1 的正三角形, 连接其 3 条边的中点, 这样原来的三角形就被分成了 4 个边长为 $1/2$ 的正三角形 (这里把它们称为 1 级的三角形, 原来的三角形称为是 0 级的), 去掉中间的那个 1 级三角形 (不包含边界), 把剩下的 3 个 1 级三角形分

别再分成 4 个边长为 $1/4$ 的正三角形, 并去掉各自中间的一个, 剩下 9 个三角形 (称为是 2 级的), 不断地重复上述步骤, 并定义各级三角形, 最终没被挖去而得到的图形即为 Sierpinski 垫片.

给定 r, U 也就唯一地确定了, 而分式 $\frac{H^s(S \cap U)}{H^s(S)}$ 表示 S 被扇形 U 所覆盖的部分占整个垫片 S 的比例, 其计算公式可循下列的归纳步骤得到:

① 判断有多少个 1 级三角形完全被 U 所覆盖, 并把该数记为 n_1 ($0 \leq n_1 \leq 3$);

② 考虑 (除去上面的 n_1 个) 剩下 $3 - n_1$ 个 1 级三角形内部的 $3(3 - n_1)$ 个 2 级三角形, 判断有多少个完全被 U 所覆盖, 把该数记为 n_2 ;

③ 假设已通过判断第 i 级三角形, 确定了 n_i , 现考虑剩下的、不能完全被包含的 i 级三角形的内部的所有 $i + 1$ 级三角形, 判断有多少个完全被 U 所覆盖, 把该数记为 n_{i+1} .

$$\text{则 } \frac{H^s(S \cap U)}{H^s(S)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{3^i}$$

本文用 Matlab 编写了递归函数, 算出 $f(r)$ 的最大值点为 $r_0 \approx 0.9130$ (程序及算法从略), 最大值为 $f(r_0) \approx 1.0684$. 由此得到以下结论.

定理 $S \not\supseteq \{x \in S \mid \bar{D}_C^s(S, x) = 1\}$

证明 (反证法) 若 $S = \{x \in S \mid \bar{D}_C^s(S, x) = 1\}$, 则特取 x 为端点 A , 如上述, (2) 式在 $r = r_0$ 处取得上确界, 即 $(H^s(S \cap U_0))/(|U_0|^s) = 1$,

$$\text{因此, } H^s(S) = \frac{H^s(S)}{H^s(S \cap U_0)} \cdot |U_0|^s = \frac{1}{f(r_0)},$$

这里, U_0 为由 r_0 所确定的扇形. 把上面的近似值代入, 得 $H^s(S) \approx 0.9360$

与文 [2, 3] 矛盾, 显然这不是计算误差所引起的. 证毕.

参考文献:

- [1] FALCONER K J. The geometry of fractal sets [M]. London: Cambridge University Press, 1985.
- [2] 周作领. Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度 [J]. 中国科学 (A 辑), 1997, 27(6):
- [3] ZHOU Z L, FENG L. A new estimate of the Hausdorff measure of the Sierpinski gasket [J]. Nonlinearity, 2000, 13: 479 - 491.

Upper Convex Density and Hausdorff Measure of the Sierpinski Gasket

HE Wei-hong¹, ZHOU Zuo-ling²

(1. School of Mathematics and Computing Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China

2. Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The upper convex density on the extreme point of the Sierpinski gasket is discussed, and it is shown that this upper convex density is not equal to 1.

Keywords: Sierpinski gasket; Hausdorff measure; upper convex density