

有限群的 π -齐次性和 π' -闭性

李 样 明

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 有限群的 π -齐次性和 π' -闭性的关系的问题是一个较古老的问题. 文章运用同余的技巧, 获得了一个较一般的结果, 是前人工作的有意义的推广及补充.

关键词: 有限群; π -齐次性; π' -闭性

中图分类号: O151.2 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2001) 02-0120-03

1 引言及结论陈述

G 表示一个有限群, 文中使用的符号、术语沿用文[1].

如果对 G 的每个非单位 π -子群 A 都有 $N_G(A)/C_G(A)$ 是 π -群, 则称 G 为 π -齐次的; 如果 G 有正规的 Hall π' -子群, 则 G 称为 π' -闭的.

关于 π -齐次性和 π' -闭性, Frobenius 曾建立了如下著名的结果.

引理^[1] 如果 $|\pi| = 1$, 那么 G 为 π -齐次性的 $\Leftrightarrow G$ 为 π' -闭的.

$|\pi| \geq 2$ 时, 引理 1 一般不成立, 交错群 A_5 就是一个反例. A_5 是 $5'$ -齐次的, 但不是 $5'$ -闭的. 这样人们自然问

问题 在附加哪些条件之下, 才能保证

G 为 π -齐次的 $\Leftrightarrow G$ 为 π' -闭的

成立?

一些学者^[2~4] 在此问题上作了工作. Arad 等^[3] 证明了如下著名结果:

引理 2 假定 $2 \in \pi$, 那么

G 为 π -齐次的 $\Leftrightarrow G$ 为 π' -闭的

根据引理 1 和 2, 问题的研究归结为研究 $|\pi| \geq 2, 2 \in \pi$ 情形. 文[4] 获得如下结果:

引理 3 令 $\pi = \{2, p, q, \dots, r\}$, $p, q, \dots, r$ 皆为 $4m+1$ 型素数, 那么

G 为 π -齐次的 $\Leftrightarrow G$ 为 π' -闭的

如果 π 有 $\pi(G)$ 外的素数, 只要讨论 $\pi \cap \pi(G)$. 如果 $\pi = \pi(G)$, 显然问题是平凡的. 故以下不妨假设 π 为 $\pi(G)$ 的真子集, 即 $\pi \subset \pi(G)$. 本文推广了文[4] 的结果, 获得:

定理 设有限群 G 的阶 $|G| =$

$2^\alpha 3^\beta p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, 2 \in \pi, \pi \subseteq \pi(G)$. 如果下述条件成立:

① $3 \in \pi$; ② 对任何奇素数 $q \leq \alpha/2, 2^q - 1 \neq$

$p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_r}, \forall p_{j_i} \in \pi$. 则

G 为 π -齐次的 $\Leftrightarrow G$ 为 π' -闭的

以上定理是引理 3 的推广 (参阅推论 1 的证明), 是对引理 1 和 2 的一个有意义的补充.

注 1 定理中的约束 “ $3 \in \pi$ ” 不能去除. 若 π 包含 2, 3, A_5 表明 G 为 π -齐次的, 但 G 不是 π' -闭的.

注 2 如果有奇素数 q , 使得 $2^q - 1 = p_1 p_2 \cdots p_k$. 令 G 为 Suzuki 群 $Sz(2^q)$, $\pi = \{2, p_1, p_2, \dots, p_k\}$. 由 Suzuki 群的子群性质^[5] 知, $Sz(2^q)$ 是 π -齐次的, 但显然 $Sz(2^q)$ 非 π' -闭的.

推论 1 若 $\pi = \{2, p_1, p_2, \dots, p_k\}$, $p, q, \dots, r$ 皆为大于 3 的 $8m+1$ 型或 $8m+3$ 型素数, 则

G 为 π -齐次的 $\Leftrightarrow G$ 为 π' -闭的

证明 若有

$$2^r - 1 = 2^{2n+1} - 1 = p_1 p_2 \cdots p_s, p_j \in \pi$$

则 $-1 \equiv p_1 p_2 \cdots p_s \pmod{8}$

由假设 $p_i \equiv 1$ 或 $3 \pmod{8}$ 于是

$$-1 \equiv 3^k \pmod{8}, 1 \leq k \leq s$$

由于 $3^k \equiv 1$ 或 $3 \pmod{8}$, 故 $-1 \equiv 1$ 或 $3 \pmod{8}$, 矛盾! 由定理知推论 1 成立.

记 $p(n)$ 为 n 的典型分解式中素数 p 的方幂. 易得推论 2.

推论 2 设 $3 \in \pi, 2(|G|) \leq 5$ 则

G 为 π -齐次的 $\Leftrightarrow G$ 为 π' -闭的

2 几个引理

引理 1^[6] π -齐次群的子群及商群的仍为

* 基金项目: 中山大学高等学术中心资助项目 (01M3)

收稿日期: 2000-06-01; 作者简介: 李样明 (1965—), 男, 副教授, 现在广东教育学院数学系工作.

π -齐次的.

引理 2^[6] 设 G 为 π -齐次的, $K \triangleleft G$. 如果 K , G/K 皆为 π' -闭的, 则 G 也为 π' -闭的.

称每个真子群为可解的单群为极小单群^[7].

引理 3^[7] 极小单群有下述 5 个类型: ① $L_2(2^r)$, r 素数, 阶为 $2^r(2^r-1)$; ② $L_2(3^r)$, r 奇素数, 阶为 $3^r(3^r-1)/2$; ③ $L_2(r)$, r 奇素数, $r > 3$ 且 $r^2+1 \equiv 0 \pmod{5}$, 阶为 $r(2^r-1)/2$; ④ $Sz(2^r)$, r 奇素数, 阶为 $(2^{2r}+1)2^r(2^r-1)$; ⑤ $L_3(3)$, 阶为 $2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$.

注 3 以上 5 类单群的子群性质可参见文 [8] p29.

引理 4 设 $|G| = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. 如果下述条件成立:

① $3 \in \pi(G)$; ② 对任奇素数 $q \leq \alpha/2$, $2^q - 1 \neq p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_t}$, $\forall p_{j_i} \in \pi(G)$, 则 G 为可解群.

证明 设引理 4 不成立, G 为极小反例. 由于题设条件对子群, 商群闭, 故 G 必为极小单群. 由 3 $\nmid |G|$, 因此由引理 3,

$$G \cong Sz(2^r), |G| = 2^{2r}(2^r-1)(2^{2r}+1)$$

由假设 $\alpha = 2r$, 于是 $2^r - 1 = p_1 p_2 \cdots p_{j_r} p_{j_i} \in \pi(G)$, 这与 2) 相违. 故引理 4 获证.

推论 2^[4] 设 $\pi(G) = \{2, p, q, \cdots, r\}$, $p, q, \cdots, r$ 皆为 $4m+1$ 型素数, 则 G 为可解群.

推论 3 设 $\pi(G) = \{2, p, q, \cdots, r\}$, $p, q, \cdots, r$ 皆为大于 3 的 $8m+1$ 型或 $8m+3$ 型素数, 则 G 为可解群.

证明 若有

$$2^r - 1 = 2^{2r+1} - 1 = p_1 p_2 \cdots p_s, p_i \in \pi(G)$$

则 $-1 \equiv p_1 p_2 \cdots p_s \pmod{8}$

由假设 $p_i \equiv 1$ 或 $3 \pmod{8}$ 于是

$$-1 \equiv 3^k \pmod{8}, 1 \leq k \leq s$$

由于 $3^k \equiv 1$ 或者 $3 \pmod{8}$, 故 $-1 \equiv 1$ 或 $3 \pmod{8}$, 矛盾! 由引理 4 知推论 2 成立.

易证

推论 4 设 $3 \in \pi(G)$, $2(|G|) \leq 5$, 则 G 为可解群.

注 4 作为一个独立的结果, 引理 4, 推论 1, 推论 2 及推论 3 亦是有趣的.

3 定理的证明

定理的证明 “ $\Leftarrow$ ” 是显然的.

“ $\Rightarrow$ ” 假设不成立, 令 G 为极小反例, 下分数步引出矛盾.

(1) G 为非 Abel 单群.

由引理 1 及 2 易知 (1) 成立.

(2) G 的真子群可解, 从而 G 为极小单群.

令 $M < G$, 引理 1 及 G 的极小性表明 M 为 π' -闭的, 令 $M_{\pi'}$ 为 M 的正规的 $\text{Hall}_{\pi'}$ -子群, 则 $M_{\pi'}$ 奇阶可解, 再由引理 4 知 $M/M_{\pi'}$ 为可解群, 于是 M 可解, (2) 成立.

下面我们就引理 3 中 5 种类型的极小单群分别进行讨论.

(3) $G \not\cong$ ①, ②, ③ 型单群.

否则, G 包含真子群 A_4 ^[8], 由引理 1 及 G 的极小性知 A_4 为 π' -闭的, 即 A_4 为 3-闭的, 这与事实不符, 因此 (3) 成立.

(4) $G \not\cong$ ④ 型单群.

否则, $G \cong Sz(2^r)$, r 奇素数. 令 G_2 为 G 的 Sylow 2-子群, 则 $N_G(G_2)$ 为以 G_2 为核的 Frobenius 群, 且

$$|N_G(G_2)| = 2^{2r}(2^r-1)$$

下面分两种情况来讨论.

① 存在 $p \mid 2^r-1$, 使得 $p \in \pi$.

由 G 的极小性知, $N_G(G_2)$ 为 π' -闭的, 令 K 的 $N_G(G_2)$ 的 $\text{Hall}_{\pi'}$ -子群. 因 $p \parallel K$, 故 $K \neq 1$, 从而 $[G_2, K] = 1$, 这与 Frobenius 群性质^[1] 相违. 故

② $\forall p \mid 2^r-1$, 都有 $p \in \pi$

从而 $2^r-1 = p_1 p_2 \cdots p_s, p_j \in \pi$

这与定理的假设 2) 相违, 故 (4) 获证.

(5) $G \not\cong$ ⑤ 型单群.

否则, $G \cong L_3(3)$. 于是 $\pi(G) = \{2, 3, 13\}$. 这样 $\pi = \{2\}$ 或 $\pi = \{2, 13\}$. 若 $\pi = \{2\}$, 引理 1 表明 G 为 π' -闭的, 这与 G 为极小反例矛盾. 若 $\pi = \{2, 13\}$, 令

$$G_{13} \in \text{Sylow}_{13}(G), 3 \parallel N_G(G_{13}/C_G(G_{13}))$$

这与 G 为 π -齐次的矛盾. 所以 (5) 成立.

由引理 3, (2) ~ (5) 产生矛盾. 故定理成立.

注 5 由定理及引理 4, 人们自然问: 如果 π -群皆为可解群, 是否成立

G 为 π -齐次的 $\Leftrightarrow G$ 为 π' -闭的

回答是否定的. 设 $3, 5 \in \pi$, 则 π -群是可解群(文 [8]), 令 $\pi = \{2, p_1, p_2, \cdots, p_k\}$, $2^q - 1 = p_1 p_2 \cdots p_k$, q 是奇素数. Suzuki 群 $Sz(2^q)$ 是 π -齐次的, 但非 π' -闭的.

致谢: 感谢导师王燕鸣教授的悉心指导!

(下转第 127 页)

the photocatalytic activity of TiO₂[J] . J Solid State Chem, 1994, 108: 198—201.

[3] YU J C, LIN J, RATMUND W M K, et al Ti_{1-x}ZrO_x solid for the photocatalytic degradation of acetone in air[J] . J Phys Chem(B) , 1998, 102: 5094—5098.

[4] MESTL G, SRINIVASAN T K K. Raman spectroscopy of monolayer type catalyst: supported molybdenum oxide[J] . Catal Rev, 1998, 40(4): 451—575.

[5] NOVA I, LIETTI L, CASAGRANDA L, et al Characteri-

zation and reactivity of TiO₂-supported MoO₃ De-Nox SCR catalysts[J] . Appl Cata(B) , Einv, 1998, 17: 245—258.

[6] HU H C, WACHS I E. Surface structures of supported molybdenum oxide catalyst: characterization by Raman and MoL₃-edge XANES[J] . J Phys Chem, 1995, 99, 10897—10910.

[7] BICKLEY R I, CARRENO T G, ELIPE A R G, et al Characterisation of iron/ titanium oxide photo-catalysts[J] . Chem Soc Faraday Trans, 1994, 90(15): 22557—2263.

The Photocatalytic Activity of TiO₂ Doping with Molybdenum Ion

ZHAN She-xia¹, FAN Shan-hu¹, LIN Zuo-mei¹, LI Yu-guang¹, SHI Zong-bing²

(1. School of Chemistry &Chemical Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China;
2. Institute of Guangzhou Environmental Science, Guangzhou 510300, China)

Abstract: TiO₂ doping Mo⁶⁺ catalysts with Mo⁶⁺ loading in the range of 0%~7% were prepared, characterized and tested for the degradation of azo dye-methyl orange. The photocatalytic activity reach the maximum at the optimal content (ca. 0.5%) of Mo⁶⁺. The results of polycrystalline X-ray diffraction and UV-Vis reflectance and Raman spectral analysis showed that the increase in activity is related to the changes in the lattice and the deformation of crystal surface. The mechanism of catalytic properties was discussed.

Keywords: molybdenum; doping; titanium oxide; photocatalytic activity

(上接第 121 页)

参考文献:

[1] GOTENSTEIN D. Finite groups[M] . New York: Harper and Row, 1980. 1—522.

[2] FERGUSON P A. On 3'-closure of 3'-homogeneous groups [J] . J Algebra, 1977, 44: 239—242.

[3] ARAD A, CHILLAG D. A criterion for the existence of normal π -complements in finite groups[J] . J Algebra, 1984, 87: 472—282.

[4] 杜兆伟. 关于有限群的 π -齐次性和 π' -闭性[J] . 数学年刊, 1989, 19A(1): 51—53.

[5] SUZUKI M. On a class of doubly transitive groups[J] . Ann of Math, 1962, 75: 104—145.

[6] BAER R. Closure and dispersion of finite groups[J] . Illinois J Math, 1985, 2: 619—640.

[7] THOMPSON J G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable[J] . Bull Amer Math Soc, 1968, 74: 383—437.

[8] 陈重穆. 内外- Σ 群与极小非 Σ 群[M] . 重庆: 西南师范大学出版社, 1988. 29.

The π -Homogeneity and π' -Closure of Finite Group

LI Yang-ming

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The problem of retention of π -homogeneity and π' -closure of finite group is an old one. A generalization of known results is obtained by using the technique of congruence of integer numbers.

Keywords: finite group; π -homogeneity; π' -closure