

三维飞船绕流问题的高精度迎风紧致差分格式^{*}

朱庆勇, 卞 静

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 从迎风紧致逼近出发, 给出了一个求解三维可压 Navier-Stokes 方程的一种高精度的数值方法. 利用 Steger-Warming 的通量分裂技术将守恒型方程中的流通向量分裂成 2 部分, 在此基础上据风向构造逼近于无粘项的三阶迎风紧致有限差分格式. 对方程中的粘性部分采用通常的二阶差分逼近. 所建立的差分格式被用来数值求解了三维飞船绕流问题.

关键词: 迎风紧致格式; Navier-Stokes 方程

中图分类号: O35; O241 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 01-0016-04

在飞船的设计过程中, 知道其气动力和物面的气动热是十分重要的. 同时对飞船周围流场结构的模拟也是非常重要的. 这就要求所用格式不仅对激波有很好的分辨率, 同时对边界层也有较高的分辨率, 只有这样才能较好地计算这些物理量. 二阶 TVD 类格式虽然能较好地捕捉激波, 但却存在局部极值点降阶的问题, 而且由于一些格式的数值粘性过大, 当用该格式计算粘性流特别是高雷诺数问题时, 格式本身的数值粘性可能掩盖了流场的物理粘性, 从而降低了格式对边界层的分辨率, 因而无法正确计算热流值. 文[1]指出, 采用高精度格式可适当放松对网格雷诺数的要求, 因此发展三阶或三阶以上的格式是必要的.

本文将双子星座简化外形为模型, 利用三阶 UCGVC 格式^[2]求解全 Navier-Stokes 方程. 对方程中的无粘部分利用 Steger-Warming 的通量分裂技术^[3]将流通向量分裂成 2 部分, 在此基础上据风向构造逼近于无粘项的三阶迎风紧致格式^[4]. 对方程中的粘性部分采用通常的二阶中心差分格式. 本文研究了飞船的物面压力分布、热流分布及三维分离结构. 来流 $M_\infty = 7.0$, $Re_\infty = 4.5 \times 10^5$. 给出了在不同攻角时的结果, 并与文[5]利用 Beam-Warming 格式的结果进行了比较. 数值结果表明: 迎风紧致格式具有良好的模拟复杂粘性绕流的能力, 结果是令人满意的.

1 控制方程

在曲线坐标下, 三维可压缩 NS 方程可写为

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \zeta} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{Q} = J^{-1} \mathbf{Q}$

$$\mathbf{E} = J^{-1} [\xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F} + \xi_z \mathbf{G}]$$

$$\mathbf{F} = J^{-1} [\eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F} + \eta_z \mathbf{G}]$$

$$\mathbf{G} = J^{-1} [\zeta_x \mathbf{E} + \zeta_y \mathbf{F} + \zeta_z \mathbf{G}]$$

$$\mathbf{E}_v = J^{-1} [\xi_x \mathbf{E}_v + \xi_y \mathbf{F}_v + \xi_z \mathbf{G}_v]$$

$$\mathbf{F}_v = J^{-1} [\eta_x \mathbf{E}_v + \eta_y \mathbf{F}_v + \eta_z \mathbf{G}_v]$$

$$\mathbf{G}_v = J^{-1} [\zeta_x \mathbf{E}_v + \zeta_y \mathbf{F}_v + \zeta_z \mathbf{G}_v]$$

$$\mathbf{Q} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T$$

$$\mathbf{E} = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (e + p)u]^T$$

$$\mathbf{F} = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, (e + p)v]^T$$

$$\mathbf{G} = [\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (e + p)w]^T$$

$$\mathbf{E}_v = Re^{-1} [0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}u + \tau_{xz}v + \tau_{xz}w + q_x]^T$$

$$\mathbf{F}_v = Re^{-1} [0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}u + \tau_{yz}v + \tau_{yz}w + q_y]^T$$

$$\mathbf{G}_v = Re^{-1} [0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}u + \tau_{zz}v + \tau_{zz}w + q_z]^T$$

$$\text{且有, } \tau_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$q_x = \frac{\mu}{(y-1)M_\infty^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial x}$$

* 基金项目: 广东省博士后基金资助项目

收稿日期: 2000-03-28; 作者简介: 朱庆勇 (1969-), 男, 博士后.

$$q_y = \frac{\mu}{(\gamma - 1)M_\infty^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = \frac{\mu}{(\gamma - 1)M_\infty^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial z}$$

这里, 动力粘性系数 μ 用 Sutherland 公式给出, $\mu = T^{3/2} \frac{1+C}{T+C}$, λ 满足 Stokes 假定 $3\lambda + 2\mu = 0$, 单位体积内总内能 e 的表达式为

$$e = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2)$$

完全气体状态方程为 $T = \gamma M_\infty^2 P / \rho$

这里, M_∞ 为流马赫数, Pr 为普朗特数, γ 是比热比. 对于空气, 取 $Pr = 0.72$, $\gamma = 1.4$, $C = 110.4/T^*$. 坐标变换 Jacobin 行列式为

$$J = 1/J^{-1} = 1/[x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)] \quad (2)$$

2 差分格式

对 NS 方程采用隐式差分格式. 令 $\delta Q^{n+1} = Q^{n+1} - Q^n$, 有

$$\begin{cases} K \delta Q_{ijk}^{n+1/2} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta \xi} \tilde{A}_{i-1,j,k}^+ \delta Q_{i-1,j,k}^{n+1/2} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta \eta} \tilde{B}_{i,j-1,k}^+ \delta Q_{i,j-1,k}^{n+1/2} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta \zeta} \tilde{C}_{i,j,k-1}^+ \delta Q_{i,j,k-1}^{n+1/2} = (RHS)_{ijk}^n \\ K \delta Q_{ijk}^{n+1} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta \xi} \tilde{A}_{i+1,j,k}^- \delta Q_{i+1,j,k}^{n+1} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta \eta} \tilde{B}_{i,j+1,k}^- \delta Q_{i,j+1,k}^{n+1} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta \zeta} \tilde{C}_{i,j,k+1}^- \delta Q_{i,j,k+1}^{n+1} = (RHS)_{ijk}^{n+1/2} \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\tilde{A}^\pm = \frac{1}{2}(A \pm \lambda_{A,\max} I)$, $\tilde{B}^\pm = \frac{1}{2}(B \pm \lambda_{B,\max} I)$, $\tilde{C}^\pm = \frac{1}{2}(C \pm \lambda_{C,\max} I)$,

$K = \left(1 + \frac{\Delta \tau}{2\Delta \xi} \lambda_{A,\max} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta \eta} \lambda_{B,\max} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta \zeta} \lambda_{C,\max}\right) I$,
 $\lambda_{A,\max} = \kappa_c \max(|\lambda_1^A|, |\lambda_2^A|, \dots, |\lambda_5^A|)$,
 $\lambda_{B,\max} = \kappa_c \max(|\lambda_1^B|, |\lambda_2^B|, \dots, |\lambda_5^B|)$,
 $\lambda_{C,\max} = \kappa_c \max(|\lambda_1^C|, |\lambda_2^C|, \dots, |\lambda_5^C|)$,
 $\lambda_{A,\max 1}, \dots, \lambda_{A,\max 5}, \lambda_{B,\max 1}, \dots, \lambda_{B,\max 5}, \lambda_{C,\max 1}, \dots,$

$\lambda_{C,\max 5}$ 分别为矩阵 $A = \frac{\partial E}{\partial Q}$, $B = \frac{\partial F}{\partial Q}$, $C = \frac{\partial G}{\partial Q}$ 的特征值, 这里 $\kappa_c \geq 1$. 差分格式 (3) 的右端项为

$$RHS = -\frac{\Delta \tau}{\Delta \xi} \delta_\xi^c E_{i,j,k} - \frac{\Delta \tau}{\Delta \eta} \delta_\eta^c F_{i,j,k} - \frac{\Delta \tau}{\Delta \zeta} \delta_\zeta^c G_{i,j,k} + GVC + \frac{\Delta \tau}{2\Delta \xi} [(E_v)_{i+1,j,k} - (E_v)_{i-1,j,k}] +$$

$$\frac{\Delta \tau}{2\Delta \eta} [(F_v)_{i,j+1,k} + (F_v)_{i,j-1,k}] + \frac{\Delta \tau}{2\Delta \zeta} [(G_v)_{i,j,k+1} - (G_v)_{i,j,k-1}] \quad (4)$$

GVC 项是为克服激波附近数值振荡而引入的群速度控制项, 详见文 [4].

右端无粘通量采用三阶迎风紧致格式:

$$\begin{aligned} \delta_\xi^c E_{i,j,k} &= \delta_\xi^c E_{i,j,k}^+ + \delta_\xi^c E_{i,j,k}^- \\ \delta_\eta^c F_{i,j,k} &= \delta_\eta^c F_{i,j,k}^+ + \delta_\eta^c F_{i,j,k}^- \\ \delta_\zeta^c G_{i,j,k} &= \delta_\zeta^c G_{i,j,k}^+ + \delta_\zeta^c G_{i,j,k}^- \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \delta_\xi^c E_{i,j,k}^+ + \frac{1}{3} \delta_\xi^c E_{i-1,j,k}^+ = \frac{1}{6} E_{i+1,j,k}^+ + \frac{2}{3} E_{i,j,k}^+ - \frac{5}{6} E_{i-1,j,k}^+ \\ \frac{1}{3} \delta_\xi^c E_{i+1,j,k}^- + \frac{2}{3} \delta_\xi^c E_{i,j,k}^- = \frac{5}{6} E_{i+1,j,k}^- - \frac{2}{3} E_{i,j,k}^- - \frac{1}{6} E_{i-1,j,k}^- \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, I-1)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \delta_\eta^c F_{i,j,k}^+ + \frac{1}{3} \delta_\eta^c F_{i,j-1,k}^+ = \frac{1}{6} F_{i,j+1,k}^+ + \frac{2}{3} F_{i,j,k}^+ - \frac{5}{6} F_{i,j-1,k}^+ \\ \frac{1}{3} \delta_\eta^c F_{i,j+1,k}^- + \frac{2}{3} \delta_\eta^c F_{i,j,k}^- = \frac{5}{6} F_{i,j+1,k}^- - \frac{2}{3} F_{i,j,k}^- - \frac{1}{6} F_{i,j-1,k}^- \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, J-1)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \delta_\zeta^c G_{i,j,k}^+ + \frac{1}{3} \delta_\zeta^c G_{i,j,k-1}^+ = \frac{1}{6} G_{i,j,k+1}^+ + \frac{2}{3} G_{i,j,k}^+ - \frac{5}{6} G_{i,j,k-1}^+ \\ \frac{1}{3} \delta_\zeta^c G_{i,j,k+1}^- + \frac{2}{3} \delta_\zeta^c G_{i,j,k}^- = \frac{5}{6} G_{i,j,k+1}^- - \frac{2}{3} G_{i,j,k}^- - \frac{1}{6} G_{i,j,k-1}^- \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, K-1)$$

这里, $\delta_\xi^c, \delta_\eta^c, \delta_\zeta^c$ 分别是 ξ, η, ζ 方向的迎风紧致算子. 这样通过正负方向扫描可求得 $\delta_\xi^c E_{i,j,k}^+, \delta_\eta^c F_{i,j,k}^+, \delta_\zeta^c G_{i,j,k}^+$. 计算中采用了 Steger-Warming 方法对无粘通量进行分裂.

$$\begin{aligned} E^\pm &= A^\pm Q, A^\pm = R_\xi \Lambda_\xi^\pm R_\xi^{-1} \\ F^\pm &= B^\pm Q, B^\pm = R_\eta \Lambda_\eta^\pm R_\eta^{-1} \\ G^\pm &= C^\pm Q, C^\pm = R_\zeta \Lambda_\zeta^\pm R_\zeta^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

在利用 Steger-Warming 通量分裂技术时, 为了避免在声速点出现振荡, 对 Jacobian 矩阵的特征值做如下修正

$$\lambda_i^\pm = \frac{1}{2} [\lambda_i \pm \sqrt{\lambda_i^2 + \kappa^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}]$$

式中, κ 为一小量, 分别对应于 ξ, η, ζ .

计算中采用代数方法生成网格

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_b + f_s[f_0 \parallel \mathbf{r}_{j\max} - \mathbf{r}_b \parallel \mathbf{N}_b + (1 - f_0)(\mathbf{r}_{j\max} - \mathbf{r}_b)] \quad (6)$$

其中, $\mathbf{N}_b$ 是物面的外法向, f_0, f_s 分别是控制法向网格的正交性和均匀性的函数. 取 $f_0 = (1 - f_s)^\omega$, 对于网格法向分布本文采用三重网格技术^[6].

流场边界由物面、外边界、对称面和出口流场组成. 物面采用速度无滑移及恒温壁条件. 对称轴采用周向处理. 对称面采用对称条件. 外边界采用自由来流条件. 出口流场参数采用一阶外推.

3 计算结果及分析

双子座飞船的外形由前体和后体 2 部分组成. 前体由半径为 R_1 的头部和半径为 R_2 的肩部组成, 后体由一个 20° 的倒锥和圆柱组成. 来流条件为

$$M_\infty = 7.0, Re_\infty = 4.5 \times 10^5,$$

$$T_\infty = 67 \text{ K}, T_w = 300 \text{ K}$$

这里雷诺数以 R_1 为参考长度. 计算中网格点数的选取是在数值试验基础上得到的, 流向为 62 个网格点, 法向为 41 个网格点, 周向 $0^\circ \sim 180^\circ$ 内为 21 个网格点 (图 1). 对于法向网格点在壁面附近的选取是经数值试验确定的. 这里也对流向网格进行了加密. 随着肩部半径的减少压力下降很快, 这说明流动膨胀非常剧烈. Q_0 代表零攻角的驻点热流, 本文计算结果是 $Q_0 = 3.93 \times 10^{-3}$, 与 Fay-Riddell 公式的估算值相近. 另外, 注意到在肩部附近由于物面曲率不连续, 使得热流出现了一个峰值, 随肩部半径的减小而增大, 这在 Shih 等^[7]做的 AOTV 热流实验和 Yamamoto 等做的数值模拟中得到证实.

图 2 给出了零攻角时前体的压力分布和热流分布. $S = 0$ 对应头部顶点, $S_{x=0}$ 代表前体弧长,

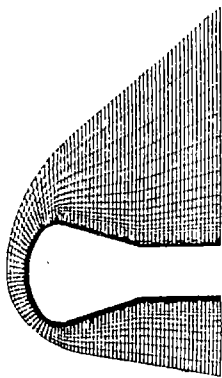


图 1 网格示意图
Fig.1 Grid system

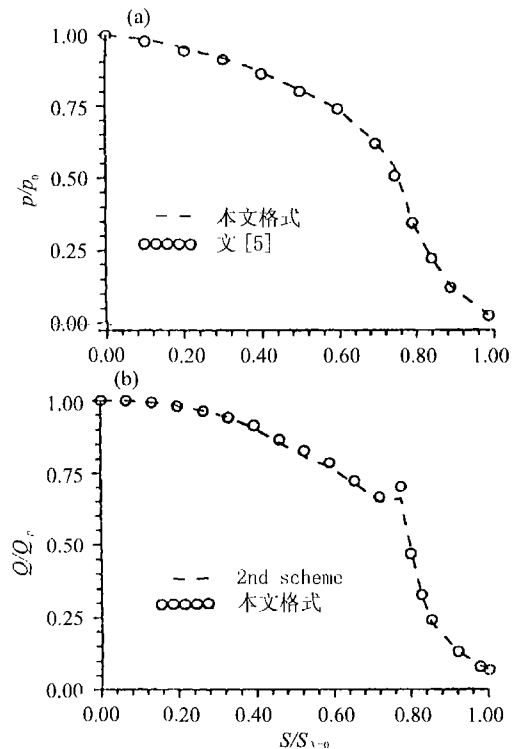


图 2 零攻角前体压力 (a) 和热流 (b) 分布
Fig.2 Distribution of pressure (a) and heat flux (b) on the surface of fore-body $\alpha = 0^\circ$

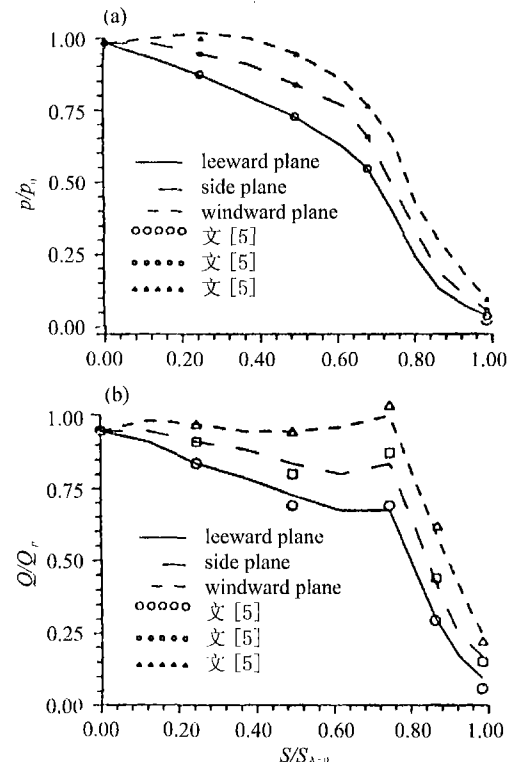


图 3 $\alpha = 10^\circ$ 前体压力 (a) 和热流 (b) 分布
Fig.3 Distribution of pressure (a) and heat flux (b) on the surface of fore-body $\alpha = 10^\circ$

头部和肩部结合处 $S/S_{x=0} = 0.714$, 很明显三阶迎风紧致格式在计算热流时对肩部附近由于曲率不连续产生的峰值结果较二阶格式好。

图 3 给出了攻角 $\alpha = 10^\circ$ 时前体的压力分布和热流分布, 并与文 [5] 进行了比较。攻角 $\alpha = 10^\circ$ 时, $Q_p/Q_0 = 1.21$; 攻角 $\alpha = 20^\circ$ 时, $Q_p/Q_0 = 1.36$, Q_p 是热流峰值。图 4 给出了在不同攻角情况下俯仰平面上的速度向量, 从图中可以发现在圆柱背风区上方产生了一个结点。在这个结点处流体为发散状, 需要两侧的流体作质量上的补充, 因此在二维和小攻角的情况下是不存在的。

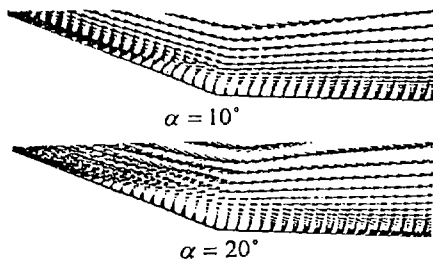


图 4 对称面内的速度向量

Fig.4 Velocity vector in symmetrical plane

图 5 是在不同的攻角 ($x = 1.35$) 位置横截面速度向量场, 可以看出, 随攻角增大, 后体横向往分离区增大。

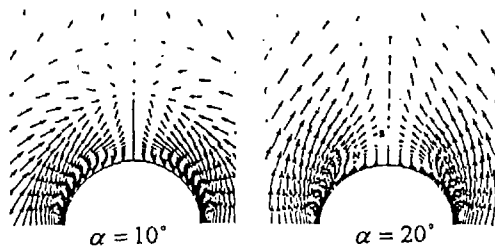


图 5 横截面内速度向量 ($x = 1.35$)

Fig.5 Velocity vector at $x = 1.35$

参考文献:

- [1] FU D X, MA Y W. Computational fluid dynamics review [M]. New York: Hefez, 1995.
- [2] 朱庆勇, 李岳生. 数值求解 Euler 方程的 UCGVC 格式的注记[J]. 计算数学, 2000, 22(2): 209 - 218.
- [3] STEGER J L, WARMING R F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods[J]. J Comput Phys, 1981, 40: 263 - 293.
- [4] FU D X, MA Y W. A high order accurate finite difference scheme for complex flow fields[J]. J Comput Phys, 1997, 134: 1 - 15.
- [5] YAMAMOTO Y. Simulation of hypersonic viscous fore- and afterbody flows over capsule-type vehicles at angles of attack[J]. AIAA Paper, 1985, 85 - 0924.
- [6] 傅得薰. 流体力学数值模拟[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.
- [7] SHIH P K, GAY A. Low L/D aerobrake heat transfer test at Mach 10[J]. AIAA Paper, 1984, 84 - 309.

A High Order Upwind Compact Difference Scheme for Simulating 3-Dimensional Flow Fields

ZHU Qing-yong, BIAN Jing

(School of Mathematics and Computing Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The difference scheme for 3-dimension compressible Navier-Stokes equations based on a third order upwind compact scheme is considered. For the inviscid portion of the Navier-Stokes equations the flux vectors are split by using Steger-Warming's flux vectors splitting technique. The flux vectors are approximated by using upwind compact scheme. The accurate difference approximation is used for the viscous portion. The difference scheme is used to simulate 3-dimension flow fields around a spaceship.

Keywords: upwind compact scheme; Navier-Stokes equations