

非负约束下含无风险证券的投资组合方法^{*}

范宝珠, 滕成业, 朱庆华

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 研究了不允许卖空条件下含无风险证券的资产组合理论, 证明了该问题的解的存在性和惟一性, 利用原有的两基金分离定理, 给出了在给定收益率下求解该问题的思路, 并给出该问题有效投资组合边界的确定方法.

关键词: 不允许卖空; 证券投资组合; 无风险证券; 有效边界

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 03-0025-04

证券投资组合是指将资金分散投资于多种证券的投资方法. 1952年 Markowitz 提出的证券投资组合决策模型奠定了现代资产组合理论的基础, 文 [1, 2] 介绍了此模型的基本内容. 但是 Markowitz 的理论并没有考虑投资比例系数的符号问题, 由于负的投资比例系数意味着卖空相应的证券, 而卖空程序在某些场合是很难实现的, 所以研究不允许卖空条件下的资产组合理论有其实际意义. 国内学者唐小我等^[3-5] 对不允许卖空条件下只含风险证券的投资组合模型的解的存在性和惟一性, 具体求解方法及有效投资组合边界的确定进行了研究. 杨德权等^[6] 研究了有效投资组合边界的可导条件及其几何性质. 由于个人投资者与机构投资者都倾向于持有一定比例的现金资产, 所以研究含无风险证券时的资产组合理论有很大的实际意义. 本文证明了不允许卖空条件下含无风险证券的投资组合模型的解的存在性和惟一性, 利用原有的两基金分离定理, 给出了在给定收益率下求解该问题的思路, 并给出该问题有效投资组合边界的确定方法.

1 允许卖空条件下的资产组合理论

假设市场有 N 种风险证券及一种无风险证券. 设第 i 种风险证券的收益为 r_i , 其预期收益率为 e_i , 即 $e_i = E(r_i)$, 无风险证券的收益率为一正常数 r_f . 分别用 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$ 及 $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N)^T$ 表示风险证券的收益率和预期收益率向量. 用 V 表示 $\mathbf{r}$ 的协方差阵, 即 $V = E[(\mathbf{r} -$

$\mathbf{e})(\mathbf{r} - \mathbf{e})^T]$, 假定各个风险证券的收益率是线性不相关, 即假定 V 是正定矩阵. 设投资在第 i 种风险证券的权重为 ω_i , 并记 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T$, 则 $\omega_f = 1 - \omega^T \mathbf{1}$ 为投资在无风险证券上的权重, 其中 $\mathbf{1}$ 表示各个分量为 1 的 N 维向量, 即 $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$. 为方便起见, 把投资在风险证券上的权重向量 ω 称为一投资组合, 则它的资产收益率为 $r(\omega) = \omega^T \mathbf{r} + (1 - \omega^T \mathbf{1})r_f$, 收益率的方差为 $\sigma(\omega) = \omega^T V \omega$. 用 $\mu(\omega)$ 表示 ω 的预期收益率, 即 $\mu(\omega) = E(r(\omega))$. 令 ω 为一投资组合, 如果在所有与 ω 有相同预期收益的投资组合中, ω 的收益率的方差最小, 则 ω 称为最小方差投资组合.

下面分 2 种情形研究最小方差投资组合. 首先考虑只在风险证券上投资的情形. 这时预期收益率为 μ 的投资组合 ω 是如下带线性约束条件的二次规划问题的解:

$$\text{模型}(A) \begin{cases} \text{s.t.} & \min \omega^T V \omega / 2 \\ & \omega^T \mathbf{e} = \mu, \omega^T \mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

由文 [1] 知此模型的最优解 ω_A 为:

$$\omega_A(\mu) = \lambda V^{-1} \mathbf{1} + \gamma V^{-1} \mathbf{e} \quad (1)$$

其中, $\lambda = (B - \mu A) / D$, $\gamma = (\mu C - A) / D$, $A = \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{e}$, $B = \mathbf{e}^T V^{-1} \mathbf{e}$, $C = \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1}$, $D = BC - A^2$. 此时投资组合 ω_A 的方差 $\sigma^2(\mu)$ 为:

$$\sigma^2(\mu) = \omega_A^T V \omega_A = \frac{C}{D} \left(\mu - \frac{A}{C} \right)^2 + \frac{1}{C} \quad (2)$$

所以模型 (A) 的有效投资组合边界是 (σ, μ) 平面上由 (2) 式表示的双曲线的右支位于点

* 基金项目: 广发证券“风险与收益决策分析模型”研究基金资助项目

收稿日期: 2000-08-03; 作者简介: 范宝珠 (1975—), 女, 研究生; 通讯联系人: 滕成业.

($\sqrt{1/C}, A/C$) 上方的部分. 现在考虑可同时在无风险证券上投资的情形. 这时预期收益率为 μ 的最小方差投资组合 ω 是如下带线性约束条件的二次规划问题的解:

$$\text{模型}(B) \begin{cases} \text{s. b} & \min \omega^T V \omega / 2 \\ \text{s. t} & \omega^T e + (1 - \omega^T \mathbf{1}) r_f = \mu \end{cases}$$

由文 [1] 知此模型的最优解 ω_B 为:

$$\omega_B = V^{-1}(e - r_f \mathbf{1}) \frac{(\mu - r_f)}{H} \quad (3)$$

其中, $H = (e - r_f \mathbf{1})^T V^{-1}(e - r_f \mathbf{1}) = B - 2r_f A + r_f^2 C$. 此时投资组合 ω_B 的方差 $\sigma^2(\mu)$ 为:

$$\sigma^2(\mu) = \omega_B^T V \omega_B = \frac{(\mu - r_f)^2}{H} \quad (4)$$

所以模型 (B) 的有效投资组合边界是

$$\sigma(\mu) = \frac{\mu - r_f}{\sqrt{H}} \quad (\mu \geq r_f) \quad (5)$$

可以证明, 射线 (5) 与双曲线 (2) 相切, 切点为 $(\sqrt{H}/(A - r_f C), (B - r_f A)/(A - r_f C))$. 切点所对应的有效投资组合, 称为切点投资组合 (tangency portfolio), 记为 ω^* , 并记 μ^* 为切点组合对应的预期收益率. 由文 [2] 有以下的两基金分离定理.

引理^[2] 模型 (B) 有效投资组合 ω_B 可由无风险证券和切点投资组合生成. 即设 ω_B 是模型 (B) 在预期收益率 μ 下的最优解, 则:

$$\omega_B = \alpha \omega^* \quad (6)$$

其中, α 满足:

$$\mu = (1 - \alpha) r_f + \alpha \mu^* \quad (7)$$

由引理可知, 模型 (B) 的最优解可由切点组合线性表出, 而切点组合 ω^* 是模型 (A) 在 μ^* 上的最优解, 所以在给定 μ 的条件下求模型 (B) 的最优解可以分为 2 步: ① 求切点组合 ω^* ; ② 由 (7) 式确定的比例系数 α .

2 不允许卖空条件下的资产组合理论

考虑可同时在无风险证券上投资的情形. 这时预期收益率为 μ 的投资组合 ω 是如下带线性约束条件的二次规划问题的解:

$$\text{模型}(C) \begin{cases} \text{s. b} & \min \omega^T V \omega / 2 \\ \text{s. t} & \omega^T e + (1 - \omega^T \mathbf{1}) r_f = \mu \\ & \omega_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

2.1 关于模型 (C) 的定理

定理 1 若 V 为正定阵, 则满足约束条件

$\omega^T e + (1 - \omega^T \mathbf{1}) r_f = \mu, \omega_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$, 且使 $\sigma^2 = \omega^T V \omega$ 达到最小的投资比例系数向量存在且惟一 (此定理的证明与文 [3] 定理 1 的证明类似).

定理 2 当模型 (B) 的最优解 $\omega_B \geq 0$ 时, 模型 (C) 的最优解 $\omega = \omega_B$; 当 ω_B 不满足非负性的时候, ω_C 中必有分量为零, 即在选定的投资证券中必有被排除在组合之外的多余证券, 当所有这类多余证券被排除后, 模型 (C) 的最优解就是模型 (B) 的最优解. (此定理的证明略)

定理 3 若模型 (B) 的最优解 ω_B 不满足非负性, 则在模型 (C) 的最优解 ω_C 中, 和负比例系数对应的证券中至少有一种是多余证券. (此定理的证明与文 [4] 定理 2 的证明类似).

2.2 求解模型 (C) 的思路

由上面的定理 2 有, 若模型 (B) 的解满足非负约束, 则模型 (B) 的解就是模型 (C) 的解. 由上面的引理, 模型 (B) 的解可由切点组合 ω^* 线性表出. 所以, 要使模型 (B) 的解满足非负约束, 必须使切点组合 ω^* 满足非负性 (注意: 切点组合 ω^* 是预期收益率为 μ^* 时模型 (A) 的解). 因此, 只需求出满足非负约束的切点组合 ω^* , 就可求出模型的 (C) 解. 根据上面的讨论, 下面给出求解模型 (C) 的思路: 首先, 求满足非负条件的切点组合 ω^* . 先求 $\mu^* = (B - r_f A)/(A - r_f C)$ 时, 模型 (A) 的最优解 ω_A^* . 若 ω_A^* 的分量均为非负, 则 ω_A^* 即为非负切点组合 ω^* ; 若 ω_A^* 存在负分量, 则转求某一 k 维满足非负条件的切点组合, 此时, V, ω, e 作相应的降维变化, 而 A, B, C 的值是依赖于 V 和 e , 所以, μ^* 的值也要作相应的变化. 在进行 k 维的寻优过程时, 分别假定 $k = N - 1, N - 2, \dots, 1$, 逐维寻优. 整个过程一共将求出 $C_N^1 + C_N^2 + \dots + C_N^{N-1} = 2^N - 2$ 个无非负约束投资比例系数向量. 其中满足非负约束且比值 $(\mu^* - r_f)/\sigma^*$ 最大者为所求的非负切点组合 ω^* . 其次, 确定比例系数 $\alpha = (\mu - r_f)/(\mu^* - r_f)$, 则给定 μ 的模型 (C) 的最优解为: $\omega_C = \alpha \omega^*$.

2.3 模型 (C) 有效投资组合边界的确定

由上面求解模型 (C) 的方法知道, 若满足非负约束的切点组合为 ω^* , 对应的方差为 $\sigma^2(\mu^*)$, 则模型 (C) 的解为 $\omega_C = \alpha \omega^*$, 对应的方差为 $\sigma^2(\mu) = \alpha^2 \sigma^2(\mu^*)$. 由于非负约束的存

在，无风险证券的比例必须大于等于零，所以 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。故有

$$\sigma(\mu) = \frac{\mu - r_f}{\mu^* - r_f} \sigma(\mu^*), \quad r_f \leq \mu \leq \mu^*$$

所以模型 (C) 的有效边界是从点 $(0, r_f)$ 到点 $(\sigma(\mu^*), \mu^*)$ 的线段。因此，确定模型 (C) 的有效边界，关键在于求出满足非负约束的切点组合 ω^* 。下面给出一种求 ω^* 的简便方法。为了便于讨论，先引入记号 d_+ 和 d_- 。由 (1) 式有， $\omega_A(\mu) = \lambda V^{-1} \mathbf{1} + \gamma V^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{g} + \mu \mathbf{h}$ ，其中， $\mathbf{g} = (B V^{-1} \mathbf{1} - A V^{-1} \mathbf{e}) / D$ ， $\mathbf{h} = (C V^{-1} \mathbf{e} - A V^{-1} \mathbf{1}) / D$ 。记 $\mathbf{g}$ ， $\mathbf{h}$ 的分量分别为 g_i ， h_i ， $i = 1, 2, \dots, N$ 。由文 [5] 知 $\mathbf{h}^T \mathbf{1} = 0$ ，故至少有一个 h_i 为正数和至少有一个 h_i 为负数。同时，由文 [5] 的讨论知， $h_i = 0$ 的情况不可能出现。所以，可将 h_i 的下标分为两类： $D_+ = \{i \mid h_i > 0\}$ 和 $D_- = \{i \mid h_i < 0\}$ ，定义：

$$d_+ = \max_{i \in D_+} \{-g_i / h_i\}, \quad d_- = \min_{i \in D_-} \{-g_i / h_i\}$$

由文 [5] 的定理 1 有，若切点组合对应的预期收益率 μ^* 满足 $d_+ \leq \mu^* \leq d_-$ ，则切点组合 ω^* 满足非负约束。所以，寻找满足非负约束的切点组合，只需找到满足条件 $d_+ \leq \mu^* \leq d_-$ 的切点组合 ω^* 即可。因此，确定模型 (C) 的有效边界的方法为：求出模型 (A) 的切点组合 ω_A^* 以及 d_+ 和 d_- ，则出现以下两种情况：

(1) 若 $d_+ > d_-$ ，说明模型 (A) 的解不满足非负性，需删去一种或一些证券，再进行分析。此种情况理论上可以找到，根据上面求非负切点组合的思路，利用计算机进行枚举，但实证上十分困难。

(2) 当 $d_+ \leq d_-$ 时，说明模型 (A) 的解有一部分满足非负性。这时，求切点组合对应的 μ^* 。又会出现以下 2 种情况：① 若 $\mu^* \in [d_+, d_-]$ ，则切点组合 ω_A^* 满足非负约束，所以， $\omega^* = \omega_A^*$ ，故模型 (C) 的有效边界为点 $A(0, r_f)$ 到点 $B(\sqrt{H} / (A - r_f C), (B - r_f A) / (A - r_f C))$ 的线段。由于非负约束的限制，当 $\mu > \mu^*$ 时，有 $1 - \alpha < 0$ ，无风险证券的比例为负，此时不考虑无风险证券。所以对于区间 $[\mu^*, \max\{e_i\}]$ 的部分是不

允许卖空条件下只含风险证券的投资组合模型有效边界的相应部分。

② 若 $\mu^* > d_-$ ，且 $d_- < \max\{e_i\}$ 时，记 $d_+ = R_1$ ， $d_- = R_2$ ，设 $-g_k / h_k = d_- = \min_{i \in D_-} \{-g_i / h_i\}$ ，这时，由文 [5] 的讨论知 ω_A^* 的第 k 个分量为负，从而由定理 3，应剔除第 k 种证券才可使切点组合满足非负约束。这时， V ， ω ， $\mathbf{e}$ 作相应的降维变化，即删掉 V 的第 k 行第 k 列， ω 的第 k 个分量， $\mathbf{e}$ 的第 k 个分量，分别记为 V_k ， ω_k ， $\mathbf{e}_k$ 。在 $N-1$ 种证券组合情形下，对 V_k ， ω_k ， $\mathbf{e}_k$ 再一次应用文 [5] 定理 1，可得到最优比例系数为非负的 μ 的变化区间 $[d_+^*, d_-^*]$ 。记 $d_- = R_2$ ， $d_-^* = R_3$ 。此时再计算相应的切点收益率 μ^* ，记为 μ_2^* ，若 $\mu_2^* \in [d_2, d_3]$ ，则模型 (C) 的有效边界的确定如 ① 中所述。否则，重复 ② 的运算，直至找到某一个区间 $[d_i, d_{i+1}]$ ，满足 $\mu_i^* \in [d_i, d_{i+1}]$ ，则模型 (C) 的有效边界的确定如 ① 中所述。

由上面的讨论可知，模型 (C) 的有效边界为从点 $A(0, r_f)$ 到 $B(\sigma(\mu^*), \mu^*)$ 的线段和点 $(\sigma(\mu^*), \mu^*)$ 到 $(\sigma_{\max}, e_{\max})$ 之间的不允许卖空条件下只含风险证券投资模型的有效边界。利用微积分的知识，不难证明线段 AB 有下面的性质：线段 AB 在对应的不允许卖空条件下只含风险证券的投资组合模型的有效边界的上方。

4 算 例

设 5 种证券的收益率均值分别为 $r_1 = 18.5\%$ ， $r_2 = 22.9\%$ ， $r_3 = 21.8\%$ ， $r_4 = 16.7\%$ ， $r_5 = 23.1\%$ ，收益率的协方差矩阵为：

$$V = \begin{bmatrix} 0.2100 & 0.2210 & -0.216 & 0.1620 & -0.2150 \\ 0.2210 & 0.2750 & -0.2460 & 0.1890 & -0.2470 \\ -0.2160 & -0.2460 & 0.2560 & -0.1850 & 0.2540 \\ 0.1620 & 0.1890 & -0.1850 & 0.1420 & -0.1880 \\ -0.2150 & -0.2470 & 0.2540 & -0.1880 & 0.2660 \end{bmatrix}$$

根据上面的方法，画出模型 (C) 的有效边界 (图 1)。

图中，分段双曲线 CD 为不允许卖空条件下只含风险证券的组合投资模型的有效边界。其中，实线：没有多余证券；星点线：剔除多余证券 4；圆点线：剔除多余证券 1 和 4。线段 AB 及双曲线段 BD 为模型 (C) 的有效边界。

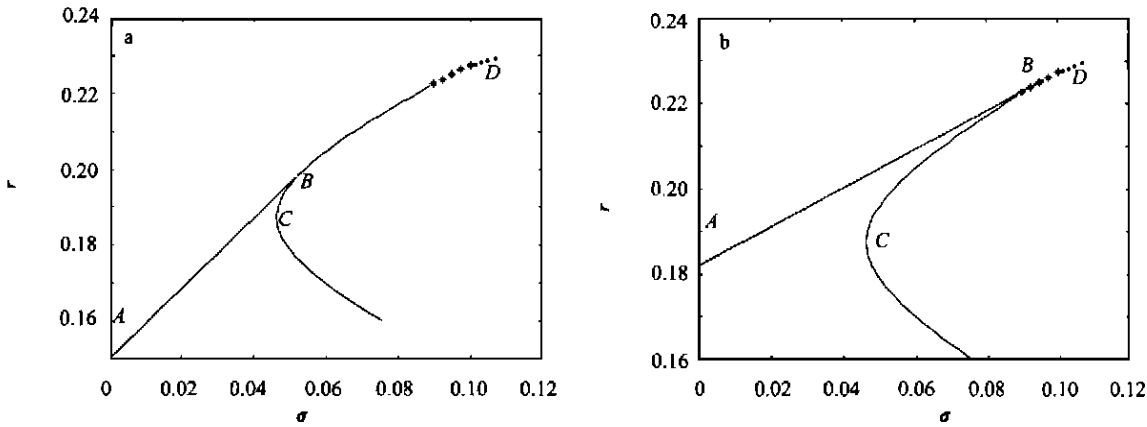


图 1 模型 (C) 的有效边界
Fig 1 Effective frontier of model (C)
a $r_f=0.15$; b $r_f=0.182$

参考文献:

[1] 哈利·M·马科维兹. 资产组合选择和资本市场的均值—方差分析[M] . 上海: 三联书店, 上海人民出版社, 1999.
[2] INGERSOLL E Jr. Theory of decision making[M] . Rowman & Littlefield Publishers, 1997. 1—200.
[3] 唐小我, 傅庚, 曹长修. 非负约束下组合证券投资决策方法的研究[J] . 系统工程, 1994, 12(11) : 23—29.
[4] 马永开, 唐小我. 非负约束下组合证券投资决策方法的进一步研究[J] . 预测, 1996, 15(4) : 53—56.
[5] 唐小我, 潘景铭. 不允许卖空条件下组合证券投资有效边界的确定方法[J] . 预测, 1995, 14(5) : 53—56.
[6] 杨德权, 胡运权, 刘鹏伟. 不允许卖空时证券组合前沿的性质研究[J] . 预测, 1997, 16(6) : 46—49.

**A Study on Portfolio Investment Decision Model
Including the Risk Free Security under the Condition of No Short Sale**

FAN Bao zhu, TENG Cheng ye, ZHU Qing hua
(Department of Statistics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The portfolio investment decision model including the risk free security under the condition of no short sale is studied. It is shown that there exists a unique solution of this model, with a new method to find out the solution presented, and the way to establish the efficient frontier is also studied.

Keywords: without short sale; portfolio selection; risk free security; efficient frontier