

上凸密度与 Hausdorff 测度——Koch 曲线^{*}

朱智伟, 周作领

(1. 中山大学数学与计算学院, 广东 广州 510275; 2. 中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 探讨 Koch 曲线的 Hausdorff 测度与端点处的上凸密度之间的关系. 利用 Koch 曲线的自相似性, 证明了 Koch 曲线端点处的上凸密度小于 1, 并通过具体的数值计算, 到它的 1 个上界.

关键词: Koch 曲线; Hausdorff 测度; 上凸密度

中图分类号: O174.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 06-0001-03

上凸密度与 Hausdorff 测度计算密切相关. 例如, 如果 Koch 曲线的端点有上凸密度 1, 就可以计算它的 Hausdorff 测度. 上凸密度的值与 Hausdorff 测度的值互相依赖, 不知道 Hausdorff 测度的值就无法计算上凸密度的值. 而且判断一个点的上凸密度的值是否为 1 也是一个复杂的问题. 本文证明 Koch 曲线的端点的上凸密度小于 1 且给出它的一个上限.

1 基本概念和相关结果

在平面 $\mathbf{R}^2$ 上取单位线段, 记作 K_0 . 把 K_0 三等分, 以中间的长 $1/3$ 的线段为底边向上作等边三角形, 再挖去底边的内部, 得到一条由 4 个长度为 $1/3$ 的线段组成的折线, 记作 K_1 . 对 K_1 的每一条边重复上述过程, 得到一条由 4^2 个长度为 $1/3^2$ 的边组成的折线, 记作 K_2 . 无限重复上述过程, 得到折线序列 $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 这个折线序列趋于一条曲线 K , 即为 Koch 曲线^[1]. 图 1 给出了 K 的构造过程中的前 2 步.

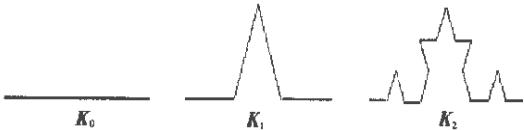


图 1 Koch 曲线构造过程前 2 步

Fig. 1 The first two steps in the construction of the Koch curve

K 是一个自相似集, 其 Hausdorff 维数为 $s = \dim_H(K) = \log_3 4$, 并且 K 为一个 s -集, 即 K 的 s -维 Hausdorff 测度是一个正有限数. 从 K 的构造中可以看到, 对于 $n \geq 1$, K_n 由 4^n 个长度为 $1/3^n$ 的边构成. 将上述过程用到 K_n 的每一条边上, 生成 1 个与 K 几何相似的集合, 相似比为 $1/3^n$, 称作 $(1/3^n)$ -Koch 曲线并记作 $(1/3^n)$ - K . 文献 [2, 3] 相继讨论了 K 的 Hausdorff 测度的上界, 特别是文 [3] 否定了 Marion 关于 Koch 曲线的 Hausdorff 测度的猜测, 得到了一个较好的上界, 即

命题 1^[3] 设 K 是如上构造的 Koch 曲线, 则其 Hausdorff 测度满足

$$H^s(K) \leq 0.589, \quad s = \log_3 4$$

设 $x \in K, D_C^s(K, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup \frac{H^s(K \cap U)}{|U|^s}$ 称为 K 在 x 点处的上凸密度, 其中, $\sup$ 是对所有包含 x 的满足 $0 < |U| \leq r$ 的凸集 U 取上确界 (参见文 [1]). 此外, 还有

命题 2^[1] 对 H^s -几乎所有 $x \in K, D_C^s(K, x) = 1$

记 $K^* = \{x \in K \mid D_C^s(K, x) = 1\}$, 它是一个可测集合且 $H^s(K^*) = H^s(K)$. 本文通过证明 K 的端点的上凸密度小于 1 证明 $K^* \neq K$, 即证明以下定理.

定理 对于 Koch 曲线 K , 其端点的上凸密度不等于 1, 因而有

^{*} 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10041005); 教育部博士点基金资助项目 (1999055810); 中山大学高等学术研究中心资助项目 (01M2)

收稿日期: 2001-04-04; 作者简介: 朱智伟 (1968—), 男, 博士生, 讲师.

$$K^* = \{x \in K \mid D_C^s(K, x) = 1\} \neq K,$$

其中, $s = \log_3 4$.

从本文的讨论中进一步可以得到 K 的端点处的上凸密度的一个上界, 即有以下命题 3.

命题 3 设 x 为 Koch 曲线 K 的一个端点 (即单位线段 K_0 的一个端点), 则有

$$D_C^s(K, x) \leq 0.815\,765, s = \log_3 4$$

2 主要结果的证明

为了讨论的需要, 定义 μ 是 K 上的自相似测度, 即对任一 Borel 集 E , 定义

$$\mu(E) = H^s(E \cap K) / H^s(K)$$

以 K_0 的一个端点为坐标原点, K_0 所在直线为 x 轴, 建立图 2 所示的直角坐标系. 设 G 为垂直于 x 轴且与 K 相交的直线. 原点到直线 G 的距离记为 g . $\triangle_g$ 为 x 轴、直线 G 与射线 OB 所围成的三角形.

引理 1 $\mu(\triangle_g) / g^s < 1.385, 0 < g \leq 1$, 其中, $s = \log_3 4$.

证明 根据自相似性, 只需对 $1/3 < g \leq 1$ 进行证明即可. 将单位线段 OA 分成 27 等份, 则区间 $[1/3, 1]$ 被分成了 18 个等距区间, 用 $(a_k, a_{k+1}]$ 表示这些等距区间, 其中 $0 \leq k \leq 18$, 而 $a_k = 1/3 + k/27$. 当 $a_k < g \leq a_{k+1}$ 时, 显然有

$$\mu(\triangle_g) / g^s \leq \mu(\triangle_{a_{k+1}}) / a_{k+1}^s$$

通过逐一计算, 除开下面的 2 种情形外, 在 g 的其它范围内均有 $\mu(\triangle_g) / g^s < 1.385$.

(1) 当 $\frac{1}{3} < g \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{27}$ 时,

$$\mu(\triangle_g) / g^s \leq \frac{1/4 + 7/64}{(1/3)^s} \approx 1.437\,5$$

(2) 当 $\frac{1}{3} + \frac{1}{27} < g \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{27}$ 时,

$$\mu(\triangle_g) / g^s \leq \frac{1/4 + 11/64}{(1/3 + 1/27)^s} \approx 1.477\,4$$

将上述 2 个区间段再各 3 等分, 按照同样的方法进行计算, 则可得到对 $1/3 < g \leq 1$, 有

$$\mu(\triangle_g) / g^s < 1.385$$

引理 2 设 μ 是上述定义的自相似测度, 用 $D_C^s(\mu, x)$ 表示 Koch 曲线 K 在点 x 处关于 μ 的上凸密度, 即

$$D_C^s(\mu, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sup \frac{\mu(K \cap U)}{|U|^s} \right\}$$

这里, $\sup$ 是对所有包含 x 的满足 $0 < |U| \leq g$

的凸集 U 取上确界. 如果 x 为 K_0 的端点, 则有

$$D_C^s(\mu, x) \leq 1.385$$

证明 如图 2 所示, 由于 $\angle BOA$ 小于 $\pi/3$, 易于看出, 对固定直径的集合, 使 $\frac{H^s(K \cap U)}{|U|^s}$ 达到最大值 U 的是以 O 为圆心的扇形. 所以在考虑点 O 的上凸密度时, 包含点 O 的凸集仅需取以 O 为中心的扇形族即可.

用 U_g 表示以 O 为中心, g 为半径的扇形, 则有 $\mu(U_g) \leq \mu \leq \triangle_g$. 由引理 1 显然有

$$D_C^s(\mu, x) \leq 1.385$$

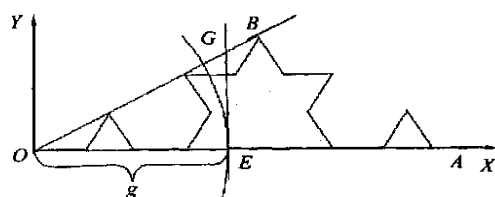


图 2 垂线 G 的位置及 g 的定义

Fig. 2 The location of vertical line G and definition of g

定理的证明 根据 μ 的定义有

$$\frac{\mu(K \cap U)}{|U|^s} = \frac{H^s(K \cap U)}{H^s(K) \cdot |U|^s}$$

由此便得

$$D_C^s(\mu, x) \cdot H^s(K) = D_C^s(K, x)$$

再由命题 1 及引理 2 便得

$$\begin{aligned} D_C^s(K, x) &= D_C^s(\mu, x) \cdot H^s(K) \\ &< 1.385 \times 0.589 = 0.815\,765 \end{aligned}$$

从而得到端点 O 的上凸密度不等于 1, 因而有 $\{x \in K \mid D_C^s(K, x) = 1\} \neq K$

3 讨论

对于任意 s -集 E (包含满足开集条件的自相似集), 均存在同样问题, 即判断

$$E_0 = \{x \in E \mid D_C^s(E, x) = 1\} = E$$

或者

$$E_0 \neq E$$

这是一个非常困难的问题, 甚至对很简单的情形至今都不清楚 E_0 是否等于 E , 例如, 对如图 3 所示的三分 Cantor 集的笛卡尔积, 人们至今不知道它的顶点的上凸密度是否为 1.

(下转第 6 页)

Existence of Gradient Kähler Ricci Expanding Soliton

GUAN Yan hui

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The existence of gradient Kähler Ricci expanding solitons on $\mathbb{C}^n$ and signs of their section curvatures are studied. A type of incomplete solitons with negative sectional curvature is obtained.

Keywords: Kähler Ricci flow; expanding soliton; sectional curvature

(上接第 2 页)

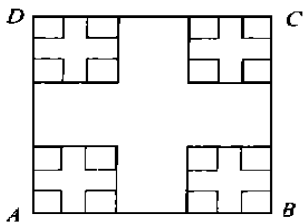


图 3 三分 Cantor 集的笛卡尔积

Fig. 3 The Cartesian product of the middle third Cantor set by itself

参考文献:

- [1] FALCONER K J. The geometry of fractal sets[M] . London: Cambridge University Press, 1985.
- [2] 周作领. Koch 曲线和 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度 [J] . 自然科学进展, 1997, 7(4): 405—409.
- [3] 周作领. 自相似集的 Hausdorff 测度——Koch 曲线 [J] . 中国科学(A 辑), 1998, 28(2): 103—107.

The Upper Convex Density and Hausdorff Measure ——the Koch Curve

ZHU Zhi-wei¹, ZHOU Zuo-ling²

(1. School of Mathematics and Computing, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China;

2. Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The relationship between the Hausdorff measure and the upper convex density of an endpoint for the Koch curve is studied. By the self-similarity of the Koch curve, the upper convex density for an endpoint is discussed and that it is less than 1 is also proved.

Keywords: Koch curve; Hausdorff measure; upper convex density