

关于双正交尺度函数的一个充要条件^{*}

李 峰, 杨力华, 刘亦书

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州510275)

摘 要: 给出了双正交刻划的一个改进形式, 它是一个充要条件, 将正交情形的刻划结果作为特款包含于其中, 从而把正交与双正交情形统一起来。

关键词: 小波分析; 双正交小波基

中图分类号: O174.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 01-0009-03

正交与双正交小波基的构造是小波分析的核心问题。按多尺度分析的框架构造小波基的一个基本途径是从二尺度方程求解其尺度函数, 然后通过尺度函数构造小波基。这归结为合适的滤波函数的构造。正交与双正交小波基是2类在实用上最重要的小波基。从历史上看, 正交小波基的构造^[1]先于双正交小波基构造^[2]。从方法上说, 二者的构造理论基本上平行, 但双正交的情形在二尺度方程的解是否属于 L^2 的问题上要困难得多。目前几乎所有的专著和教材都是将正交与双正交的情形分开讨论的(参见文[3])。一个自然的问题是, 正交和双正交的情形是否可以统一处理? 如果能将这2种情形统一处理, 将更加符合数学理论的精炼性和完美性的要求。对于小波基的正交与双正交性通过相应的滤波函数的刻划, 文[4]分别给出了如下结果(引理1和引理2)。在叙述它们之前, 先介绍一些基本的术语和记号。

1 相关引理

本文用 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}^d$, $\mathbf{R}^d$, $\mathbf{T}^d$, $\mathbf{E}_d$ 分别表示自然数集、 d 维整数点集、 d 维实数点集、商群 $\mathbf{R}^d/2\pi\mathbf{Z}^d$ 以及 $[0, 1]^d$ 的顶点集。

设函数 $\phi, \psi \in L^2(\mathbf{R}^d)$, 记

$$\Phi(\xi) := [\phi, \psi] := \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^d} |\phi(\xi + 2\pi\alpha)|^2$$

$$\Phi(\xi) := [\hat{\phi}, \hat{\psi}] := \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^d} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi\alpha)|^2$$

方括号积 $[\phi, \psi]$ 最早在文[5]中引入, 在那

里可以找到它的一些基本性质。

函数 $\phi, \psi \in L^2(\mathbf{R}^d)$ 称为满足二尺度方程, 是指存在序列 $\{d_k\}, \{\tilde{d}_k\} \in l^2(\mathbf{Z}^d)$ 使得在 $L^2(\mathbf{R}^d)$ 中成立着:

$$\phi(x) = 2^d \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} d_k \phi(2x - k),$$

$$\psi(x) = 2^d \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \tilde{d}_k \psi(2x - k)$$

当 $\Phi \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$ 或 $\{\tilde{d}_k\} \in l^1(\mathbf{Z}^d)$ 时, 易证上式等价于:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \phi\left(\frac{\xi}{2}\right), \\ \hat{\phi}(\xi) &= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad \text{a. e. } \xi \in \mathbf{R}^d \end{aligned}$$

其中,

$$m_0(\xi) := \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} d_k e^{-ik\xi},$$

$$\tilde{m}_0(\xi) := \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \tilde{d}_k e^{-ik\xi} \in L^2(\mathbf{T}^d)$$

称为相应的滤波函数。

$\{\phi, \psi\} \subset L^2(\mathbf{R}^d)$ 称为是双正交的, 如果:

$$\langle \phi(\cdot), \psi(\cdot - k) \rangle = \delta_k, \quad \forall k \in \mathbf{Z}^d$$

若 $\phi = \psi$, 则称 $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ 是标准正交的。

关于 $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ 的正交性通过滤波函数 $m_0(\xi)$ 来刻划。

引理1^[4] 设 $\phi \in C(\mathbf{R}^d)$, $m_0(\xi) \in C(\mathbf{T}^d)$ 满足

* 收稿日期: 2001-03-22;

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871095); 广东省自然科学基金资助项目(990227)

作者简介: 李峰(1964-), 男, 长沙电力学院副教授; Email: lf@cseu.edu.cn

$$\sum_{\nu \in \mathbf{E}_d} |m_0(\xi + \pi \nu)|^2 = 1, \quad \forall \xi \in \mathbf{T}^d$$

$$m_0(\pi \nu) = \tilde{m}_0(\pi \nu) = \delta_{0, \nu}, \quad \forall \nu \in \mathbf{E}_d$$

又设 $\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$ 点态地收敛于 $\phi(\xi)$ (a. e. 于 $\mathbf{R}^d$), 则 $\phi \in L^2(\mathbf{R}^d)$, 并且 $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ 是标准正交的当且仅当存在常数 $C > 0$, 使得:

$$|\Phi(\xi)| \geq C \quad \text{a. e. } \xi \in \mathbf{T}^d \quad (1)$$

关于 $\{\phi, \hat{\phi}\}$ 的双正交性通过滤波函数 $\{m_0(\xi), \tilde{m}_0(\xi)\}$ 为来刻画。

引理 2^[1] 设 $\phi, \hat{\phi} \in L^2(\mathbf{R}^d) \cap C(\mathbf{R}^d)$, $m_0(\xi), \tilde{m}_0(\xi) \in C(\mathbf{T}^d)$ 满足

$$\sum_{\nu \in \mathbf{E}_d} \bar{m}_0(\xi + \pi \nu) \tilde{m}_0(\xi + \pi \nu) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbf{T}^d =$$

$$m_0(\pi \nu) = \tilde{m}_0(\pi \nu) = \delta_{0, \nu}, \quad \forall \nu \in \mathbf{E}_d$$

又设 $\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0(2^{-j}\xi)$ 分别点态地收敛于 $\phi(\xi)$ 与 $\hat{\phi}(\xi)$ (a. e. 于 $\mathbf{R}^d$), 如果存在常数 $C > 0$ 使得

$$|\Phi(\xi)| \geq C, \quad |\hat{\Phi}(\xi)| \geq C, \quad \text{a. e. } \xi \in \mathbf{T}^d \quad (2)$$

则 $\{\phi, \hat{\phi}\}$ 是双正交的, 反之, 当也有

$$|\Phi(\xi)| \leq C, \quad |\hat{\Phi}(\xi)| \leq C, \quad \text{a. e. } \xi \in \mathbf{T}^d \quad (3)$$

时, (2) 式还是 $\{\phi, \hat{\phi}\}$ 双正交的必要条件。

本文对引理 2 给出 1 个改进形式, 得到 $\{\phi, \hat{\phi}\}$ 双正交的 1 个充要条件而无需附加条件式 (3), 并且包含引理 1 做为其 1 个特款。

2 尺度函数双正交性的一个充要条件

定理 1 设 $\phi, \hat{\phi} \in C(\mathbf{R}^d)$, $m_0(\xi), \tilde{m}_0(\xi) \in C(\mathbf{T}^d)$ 满足

$$\sum_{\nu \in \mathbf{E}_d} \tilde{m}_0(\xi + \pi \nu) \bar{m}_0(\xi + \pi \nu) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbf{T}^d$$

$$m_0(\pi \nu) = \tilde{m}_0(\pi \nu) = \delta_{0, \nu}, \quad \forall \nu \in \mathbf{E}_d$$

又设 $\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0(2^{-j}\xi)$ 分别点态地收敛于 $\phi(\xi)$ 与 $\hat{\phi}(\xi)$ (a. e. 于 $\mathbf{R}^d$), 那么,

(1) 若存在常数 $B > 0$, 使得算子:

$$\sum_{\nu \in \mathbf{E}_d} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi \nu\right) \tilde{m}_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi \nu\right) \right| \left| f\left(\frac{\xi}{2} + \pi \nu\right) \right|$$

满足 $\|S^{-n}1\|(\xi) \leq B, \text{ a. e. } \xi \in \mathbf{T}^d (\forall n \in \mathbf{N})$, 则

$$\phi\hat{\phi} \in L^1(\mathbf{R}^d).$$

(2) 若 $\phi, \hat{\phi} \in L^2(\mathbf{R}^d)$, 则 $\{\phi, \hat{\phi}\}$ 双正交当且仅当存在常数 $C > 0$, 使得

$$|\Phi(\xi)| |\hat{\Phi}(\xi)| \geq C, \text{ a. e. } \xi \in \mathbf{T}^d \quad (4)$$

证明 对 n 作归纳法可以证明

$$(|S^{-n}1|)(\xi) = \sum_{\nu \in \mathbf{E}_d} |\phi_n(\xi + 2\pi \nu)|^2 \phi_n(\xi).$$

$$\phi\hat{\phi}_n(\xi + 2\pi \nu) \mid, \text{ a. e. } \xi \in \mathbf{T}^d$$

其中

$$\phi_n(\xi) := \left[\prod_{j=1}^n m_0(2^{-j}\xi) \right] \chi_{2^n \mathbf{T}^d}(\xi) \quad (5)$$

$$\hat{\phi}_n(\xi) := \left[\prod_{j=1}^n \tilde{m}_0(2^{-j}\xi) \right] \chi_{2^n \mathbf{T}^d}(\xi) \quad (6)$$

于是

$$\int_{\mathbf{T}^d} (|S^{-n}1|)(\xi) d\xi = \int_{\mathbf{R}^d} |\phi_n(\xi)|^2 \phi_n(\xi) d\xi$$

从而

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\phi_n(\xi)|^2 \hat{\phi}_n(\xi) d\xi \leq B(2\pi)^d$$

利用 Fatou 引理并注意到

$$\hat{\phi}_n(\xi) \phi_n(\xi) \rightarrow \hat{\phi}(\xi) \phi(\xi) \quad \text{a. e. } \xi \in \mathbf{R}^d \quad (n \rightarrow \infty)$$

得

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\phi_n(\xi)|^2 \hat{\phi}_n(\xi) d\xi \leq B(2\pi)^d$$

所以 (1) 式得证。

关于 (2) 式, 对文 [4] 中关于引理 2 的证明进行修改即可。事实上, 在那里已证明 $\{|\Phi(2^{-n}\xi)|^2\}$ 是一致可积的, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 及有限测度集 $K \subset \mathbf{R}^d$ 使得

$$\int_{e \cup (\mathbf{R}^d \setminus K)} |\phi_n|^2 d\xi < \epsilon$$

$$\forall e \subset \mathbf{R}^d, |e| < \delta \text{ 成立.}$$

同理 $\{|\Phi(2^{-n}\xi)|^2\}$ 一致可积。由 Cauchy-Schwartz 不等式知 $\{\sqrt{|\Phi(2^{-n}\xi)|^2} |\Phi(2^{-n}\xi)|^2\}$ 一致可积, 于是若条件 (4) 成立, 则推出 $\{|\bar{\Phi}_n \hat{\phi}_n|\}$ 一致可积。又 $\{\bar{\Phi}_n \hat{\phi}_n\}$ 点态地收敛到 $\bar{\Phi} \hat{\phi}$ 。利用 Egoroff 定理与积分的绝对连续性容易证明

$$\|\bar{\Phi}_n \hat{\phi}_n - \bar{\Phi} \hat{\phi}\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

但 (见文 [4]):

$$\left[\frac{1}{2\pi} \right]^d \int_{\mathbf{R}^d} \bar{\Phi}(\xi) \hat{\phi}_n(\xi) e^{-ik\xi} d\xi = \delta_{0,k} \quad (\forall k \in \mathbf{Z}^d)$$

令 $n \rightarrow \infty$ 立得

$$\int_{\mathbf{R}^d} \bar{\phi}(x) \phi(x-k) dx = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^d \int_{\mathbf{R}^d} \bar{\hat{\phi}}(\xi) \hat{\phi}(\xi) e^{-ik\xi} d\xi = \hat{\phi}_k \quad \forall k \in \mathbf{Z}^d$$

即 $\langle \phi(\cdot), \phi(\cdot - k) \rangle = \hat{\phi}_k (\forall k \in \mathbf{Z}^d)$ 。这就是 $\{\phi, \phi\}$ 双正交。

必要性的证明更容易, 因 $\{\phi, \phi\}$ 双正交蕴含

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^d} \bar{\phi}(\xi + 2\pi\alpha) \hat{\phi}(\xi + 2\pi\alpha) = 1 \quad \text{a.e.}$$

于是

$$\Phi(\xi) \overline{\Phi(\xi)} \geq$$

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^d} \phi(\xi + 2\pi\alpha) \bar{\phi}(\xi + 2\pi\alpha) \right| = 1, \text{ a.e.}$$

证毕。

在标准正交情形, 有 $\phi = \hat{\phi}, \tilde{m}_0 = m_0$, 此时引理 1 的条件足以保证定理的条件成立, 这只需注意到 $(|S|^{-n} 1)(\xi) \equiv 1 (\forall n \in \mathbf{N})$ 即可明白。这种情形下引理 1 是定理的 1 个特款。

在双正交情形, 定理 1 之 (2) 是一个充要条件, 由它可以立即推出引理 2。引理 2 的必要性部分还需附加条件 (3)。而定理 1 中去掉了这个条件, 所给出的双正交条件显然比引理 2 所给出的更为本质。

这样, 关于尺度函数的正交与双正交性通过其滤波函数的刻画, 定理 1 作了统一的处理, 使得正交情形是它的特款。而在文 [4] 中, 正交和双正交是分开处理的。定理 1 的这种统一处理使得文 [4] 中关于正交和双正交的其它后续结果也能用统

一的方式给出, 比如正交和双正交的 Cohen 条件刻画 ([4, p81; p129]) 可以统一地述说成以下定理 2。

定理 2 设 $\phi, \hat{\phi} \in C(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mathbf{R}^d), m_0(\xi), \tilde{m}_0(\xi) \in C(\mathbf{R}^d)$ 满足上述定理 1 的条件, $|F|(\xi) := [| \phi |, | \hat{\phi} |]$ 连续, 则 $\{\phi, \phi\}$ 双正交当且仅当 $\tilde{m}_0 m_0$ 满足 Cohen 条件, 即存在 1 个与 $\mathbf{T}^d$ 同余的紧集 K , 以 0 为内点, 使得

$$\inf_{\xi \in K, j \in \mathbf{N}} |\tilde{m}_0(2^{-j}\xi) m_0(2^{-j}\xi)| > 0$$

证明只需结合定理 1 对文 [4] 的相关部分作修改即得, 此不赘述。

令 $\phi = \hat{\phi}, \tilde{m}_0 = m_0$, 即得到标准正交情形的结果。

参考文献:

- [1] DAUBECHIES I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. Comm Pure Appl Math, 1988, 41: 909—996.
- [2] COHEN A, DAUBECHIES I, FEAUVEAU J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets[J]. Comm Pure Appl Math, 1992, 45: 485—560.
- [3] DAUBECHIES I. Ten lectures on wavelets[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [4] 龙瑞麟. 高维小波分析[M]. 北京: 世界图书出版公司北京公司, 1995: 79, 128.
- [5] JIA R Q, MICCHELI C A. Using the refinement equation for the construction of pre-wavelets II: Power of two // LAURENT P L, MÉHAUTÉ A Le, SCHUMAKER L L. Curves and surfaces[C]. New York: Academic Press, 1991: 209—246.

A Sufficient and Necessary Condition for Biorthogonal Scaling Functions

LI Feng, YANF Li hua, LIU Yi shu

(Department of Scientific Computing and Computer Applications,
Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: In the theory of multiscale analysis, orthogonality and biorthogonality of wavelets can be characterized by their corresponding filtering functions. An improvement of the characterization for biorthogonality, which is an sufficient and necessary condition and valid for both orthogonality and biorthogonality, is obtained.

Key words: wavelet analysis; biorthogonal wavelet basis