

动力系统极限环计算方法的改进*

陈树辉, 黄武林, 徐 兆

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 对计算极限环的摄动-增量法作了改进, 解的表达形式更一般化, 更适合一般平面动力系统极限环及其分叉的计算. 该方法的特点是用有限 Fourier 级数给出极限环的近似表达式, 把微分方程化为线性增量方程, 应用谐波平衡法建立 Fourier 系数的线性代数方程组, 再用迭代法求解, 计算方法直观、简单, 求出了以前原方法难于计算的二次系统的4个极限环, 也求出了其具有争议的算例的极限环的个数. 算例表明该方法是有效的. 求出了改进前的摄动-增量法所不能求出的极限环.

关键词: 动力系统; 极限环; 分叉值; 摄动-增量法

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 05-0001-05

平面动力系统极限环的个数及其分布在理论和应用上都是重要而又非常困难的问题. 100多年来人们对此进行了许多研究并取得了一些重要成果, 但对于给定的具体系统如何计算极限环的个数及其分布则缺乏有效的计算方法. 近年来, Chan 等^[1,2]提出了一种新方法, 称为摄动-增量法, 应用于非线性振动系统的极限环, 同(异)宿轨线等的计算, 也被推广应用于半稳定极限环和一类平面微分方程极限环的计算^[3,4], 都取得了很好的效果. 它与常用的数值方法——Runge-Kutta法不同的是, 不但可以计算稳定或不稳定的极限环, 而且可以计算半稳定极限环并给出极限环的表达式. 这种新方法兼有分析法和数值法的优点, 不足之处是极限环的表达式较烦杂, 还不够普遍, 不适用于一般的动力系统. 对某些特殊的算例还求不出其全部的极限环. 本文把极限环的表达式加以改进使能推广应用于下列系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \lambda f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= -g(x) + \lambda h(x, y, \mu)\end{aligned}\quad (1)$$

其中, f, g 和 h 为其变元的多项式函数, λ 和 μ 为实参数. 常见的非线性振动方程

$$\ddot{x} + g(x) = \lambda f(x, \dot{x}, \mu)$$

和二次系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2, \\ \dot{y} &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2\end{aligned}$$

都可以化为方程(1)的形式.

1 极限环的新表达式及其计算

在方程(1)中假设当 $\lambda \in (0, \bar{\lambda}]$ 时原点外圍存在极限环, $g(0) = f(0, 0, \mu) = h(0, 0, \mu) = 0$, 即原点为平衡点. 作非线性时间变换

$$\phi = \Phi(\varphi) \quad (2)$$

其中, φ 是新时间, $\Phi(\varphi)$ 为 φ 的 2π 周期函数, 在 φ 域内极限环亦是 φ 的 2π 周期函数.

$$x = a_0 + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (3)$$

$$y = c_0 + \sum_{k \geq 1} (c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi) \quad (4)$$

$$\Phi = p_0 + \sum_{k \geq 1} p_k \cos k\varphi + q_k \sin k\varphi \quad (5)$$

此外, 还假设

$$y(0) = 0 \quad (6)$$

$$x(0) = \gamma \quad (7)$$

即极限环当 $\varphi = 0$ 时通过 x 轴上一点 $(\gamma, 0)$. 本方法与文[1~4]主要不同之处是式(3), 以往 x 的表达式为 $x = a_0 + a_1 \cos \varphi$. 显然, 这里的表达式更有一般性, 因而它可以用来表示更一般系统的极限环; 而文[1~4]主要用于 Liénard 方程极限环的计算, 一般平面动力系统则不一定可以计算. 所以本文方法的应用范围较广. 应用(2)式方程(1)可改写为

$$\Phi \frac{dx}{d\varphi} = y + \lambda f(x, y, \mu) \quad (8)$$

$$\Phi \frac{dy}{d\varphi} = -g(x) + \lambda h(x, y, \mu)$$

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19772075); 中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (00M10)

收稿日期: 2001-03-01; 作者简介: 陈树辉 (1944-), 男, 教授, 博士生导师.

极限环的计算分2步进行.第1步假设 λ 为小参数,当 $\lambda \approx 0$ 时其近似解为 x_0, y_0 和 Φ_0 ,对应 $\mu = \mu_0$ (将在下一节说明它的解法).第2步假设 λ 不是小参数,则可用增量法求解.现给 λ 小增量 $\Delta\lambda$,那么相应应有 $\Delta x, \Delta y, \Delta\Phi$ 和 $\Delta\mu$.令

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda, x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y,$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi, \mu = \mu_0 + \Delta\mu$$

代入方程(6)~(8),略去高阶项后便得增量方程

$$\begin{aligned} \Phi_0 \frac{d\Delta x}{d\varphi} - \lambda \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 - \Delta y - \lambda \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 + \\ \Delta\Phi \frac{dx_0}{d\varphi} - \lambda \Delta\mu \left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \right)_0 = -\Phi_0 \frac{dx_0}{d\varphi} + y_0 + \lambda f_0 \\ \Delta x \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_0 - \lambda \Delta x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_0 + \Phi_0 \frac{d\Delta y}{d\varphi} - \\ \lambda \Delta y \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_0 + \Delta\Phi \frac{dy_0}{d\varphi} - \lambda \Delta\mu \left(\frac{\partial h}{\partial \mu} \right)_0 = \\ -\Phi_0 \frac{dy_0}{d\varphi} - g_0 + \lambda h_0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Delta y(0) = -y_0(0) \quad (11)$$

$$\Delta x(0) = -x_0(0) + \gamma_0 \quad (12)$$

其中, $()_0$ 表示函数在 x_0, y_0, Φ_0 和 μ_0 取值, $\gamma_0 = x_0(0)$.由式(3)~(5)可得 $\Delta x, \Delta y$ 和 $\Delta\Phi$ 的近似表达式

$$\begin{aligned} \Delta x &\approx \Delta a_0 + \sum_{k=1}^{m_1} (\Delta a_k \cos k\varphi + \Delta b_k \sin k\varphi) \\ \Delta y &\approx \Delta c_0 + \sum_{k=1}^{m_2} (\Delta c_k \cos k\varphi + \Delta d_k \sin k\varphi) \\ \Delta\Phi &\approx \Delta p_0 + \sum_{k=1}^{m_3} (\Delta p_k \cos k\varphi + \Delta q_k \sin k\varphi) \end{aligned} \quad (13)$$

只要适当选取 m_1, m_2 和 m_3 ,上式就可满足所需的精度.把(13)式代入式(9)~(12),应用谐波平衡法可得 $\Delta a_0, \Delta a_k, \Delta b_k, \Delta c_0, \Delta c_k, \Delta d_k, \Delta p_0, \Delta p_k, \Delta q_k$ 和 $\Delta\mu$ 的线性代数方程组

$$\begin{aligned} A_{n,0} \Delta a_0 + \sum_{k=1}^{m_1} (A_{n,k} \Delta a_k + B_{n,k} \Delta b_k) + \\ c_{n,0} \Delta c_0 + \sum_{k=1}^{m_2} (c_{n,k} \Delta c_k + D_{n,k} \Delta d_k) + p_{n,0} \Delta p_0 \\ + \sum_{k=1}^{m_3} (P_{n,k} \Delta p_k + Q_{n,k} \Delta q_k) + U_n \Delta\mu = R_n \end{aligned} \quad (14)$$

$$n = 1, 2, \dots, 4M + 4, M = (m_1 + m_2 + m_3)/2$$

先计算方程(8)的参数 μ 与极限环的 x 轴截距 γ 的关系曲线 $\mu = \bar{\mu}(\gamma)$.由方程(14)解出 Δa_0 ,

$\Delta a_k, \dots, \Delta p_k, \Delta q_k$,和 $\Delta\mu$ 后可得 $\Delta x, \Delta y$ 和 $\Delta\Phi$,用 $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y, \Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi, \mu = \mu_0 + \Delta\mu$ 作为新的 x_0, y_0, Φ_0 和 μ_0 ,从头再算.当 R_n 小于预先给定的误差时(本文的算例误差为 10^{-8}),迭代结束,这就是常用的迭代法.此时得到对应于 γ_0 和 $\lambda = \Delta\lambda$ 的解 x, y, Φ 和 μ .暂时固定 $\gamma = \gamma_0$ 而变动 λ ,经 N 次增量后 $\lambda = N\Delta\lambda$,当 N 达到适当值时, λ 将达到所需的值 $\bar{\lambda}$;然后固定 $\lambda = \bar{\lambda}$,而变动 γ_0 ,即用 γ_1 代替 γ_0 ,重复上述计算过程.如此不断变动 $\gamma_0, \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_k$,结果可得对应 $\lambda = \bar{\lambda}$ 的 x_j, y_j, Φ_j 和 $\mu_j, j = 0, 1, 2, \dots, k$.我们关心的是 μ_j 与 γ_j 的关系,即 $\mu_j = \bar{\mu}(\gamma_j)$.这样就可以作出 $\mu = \bar{\mu}(\gamma)$ 的曲线.根据给定参数值 μ 与曲线 $\bar{\mu}(\gamma)$ 的交点个数,就可以确定极限环的个数. $\bar{\mu}(\gamma)$ 的局部极大极小值处,极限环个数出现分叉.

如果没有 $\bar{\mu}(\gamma)$ 曲线,给定参数 μ 的值去计算方程(8)的极限环,则 $x(0) = \gamma$ 不能事先确定.因此,方程(7)应删去,此外由于 μ 给定, $\Delta\mu = 0$.于是方程组(9)~(12)减少1个未知数 $\Delta\mu$ 和减少方程(12),相应的线性代数方程(14)应去掉第 $4M + 4$ 个方程和去掉未知量 $\Delta\mu$.按上述迭代方法当 λ 达到所需要的值 $\bar{\lambda}$ 时,求得的 x, y 和 Φ 便是对应于给定 μ 和 $\lambda = \bar{\lambda}$ 的极限环.

2 当 $\lambda \approx 0$ 时,极限环的近似解

现在回到方程(8),当 $\lambda \approx 0$ 时,求极限环的近似解.由方程(8)第1个方程解出 y 并代入第2个方程,则方程(8)化为

$$\Phi \frac{dx}{d\varphi} = y + \lambda f \quad (15)$$

$$\Phi \frac{d}{d\varphi} \left(\Phi \frac{dx}{d\varphi} \right) - \lambda \Phi \frac{df}{d\varphi} = -g + \lambda h \quad (16)$$

参考文献[2],可以简单地令 $x = a_0 + a_1 \cos \varphi$,在方程(16)两边乘以 $dx/d\varphi = -a_1 \sin \varphi$,然后积分得

$$\begin{aligned} (\Phi \sin \varphi)^2 / 2 - \frac{V(a_1 + a_0) - V(a_1 \cos \varphi + a_0)}{a_1^2} + \\ \frac{\lambda \Phi f \sin \varphi}{a_1} - \frac{\lambda}{a_1} \int_0^\varphi \left[\frac{fd(\Phi \sin \varphi)}{d\varphi} - h \sin \varphi \right] d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$V(x) = \int_0^x g(u) du$$

在方程(17)中分别令 $\varphi = \pi$ 和 2π 得

$$V(a_1 + a_0) - V(-a_1 + a_0) + \lambda a_1 \int_0^\pi \left[\frac{fd(\Phi \sin \varphi)}{d\varphi} - h \sin \varphi \right] d\varphi = 0 \quad (18)$$

和

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{fd(\Phi \sin \varphi)}{d\varphi} - h \sin \varphi \right] d\varphi = 0 \quad (19)$$

因为 $\lambda \approx 0$, 于是由(15), (17), (18) 和(19) 式, 求得极限环的近似解为

$$x_0 = a_0 + a_1 \cos \varphi, y_0 \approx -a_1 \Phi \sin \varphi \quad (20)$$

$$\Phi_0 \approx \left\{ \frac{2V(a_1 + a_0) - 2V(a_1 \cos \varphi + a_0)}{a_1^2 \sin^2 \varphi} \right\}^{1/2} \quad (21)$$

$$V(a_1 + a_0) - V(-a_1 + a_0) \approx 0 \quad (22)$$

由(19) 和(22) 式, 当给定 μ 时, 可求出 a_0, a_1 , 当给定 a_1 时, 则可以求出 μ 和 a_0 .

3 算 例

作为本方法的应用, 研究2个例子. 第1个例与 Hilbert 第十六问题有关.

例1 对于多项式微分系统

$$\dot{x} = X_n(x, y), \dot{y} = Y_n(x, y)$$

其中, X_n 和 Y_n 为 n 次多项式, 极限环的最大个数 H_n 是多少? 这个问题至今已100多年了, 但至今连最简单情形, 即 $n = 2$ 时答案仍是未知数. 在1967年以前, 人们相信 $H(2) = 3$, 但1979年史松龄^[5] 证明 $H(2) \geq 4$, 这是一个突破, 其例子如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y - 10x^2 + (5 + \delta)xy + y^2 \\ \dot{y} &= x + x^2 + (-25 + 8\epsilon - 9\delta)xy \end{aligned} \quad (23)$$

当 $\mu = -10^{-250}$, $\epsilon = -10^{-70}$, $\delta = -10^{-18}$ 或 $\mu = -10^{-200}$, $8\epsilon = -10^{-52}$, $\delta = -10^{-13}$ 时, 方程(23) 在原点外围有3个极限环, 在平衡点(0, 1)外围有1个极限环, 即总共至少有4个极限环. 至于是否有多于4个极限环, 则不知道. 这个例子虽然证明了存在4个极限环, 但至今求不出它的解. 最近文[6, 7]应用 bifurcation package AUTO 97 求得方程(23)的极限环分叉图并作出了极限环相图. 本文将进一步给出这些极限环的近似表达式. 令 $x \rightarrow y, y \rightarrow x$, 则方程(23)可改写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \lambda[(-25 + \eta)xy + y^2] \\ \dot{y} &= -x + x^2 + \lambda[\mu y + (5 + \delta)xy - 10y^2] \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $0 < \lambda \leq 1$. 可以先给定 η 和 δ , 然后作参数曲线 $\mu = \bar{\mu}(\gamma)$. 为了和文[7] 比较, 令 $\eta = 0.8$ 和 $\delta = -0.1$. 现在本例 $f = -24.2xy + y^2, h = \mu y +$

$4.9xy - 10y^2, g = x - x^2$, 因而 $V(x) = x^2/2 - x^3/3$. 当 $\lambda \approx 0$ 时, 由方程(19), (21) 和(22) 得

$$a_0 = (1 - \sqrt{1 - 4a_1^2/3})/2$$

$$\Phi_0(\varphi) = (1 - 2a_0 - 2a_1 \cos \varphi/3)^{1/2}$$

$$M_0 = I_1/I_2$$

$$I_1 = -4.9 \int_0^{2\pi} (a_1 \cos \varphi + a_0) \Phi_0 \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \Phi_0 \sin^2 \varphi d\varphi \quad (25)$$

令 $a_1 = 0.001$, 则由上式求得 $a_0 = 1.2 \times 10^{-15}$, $\mu_0 = -2 \times 10^{-7}, \gamma_0 = a_0 + a_1$. 于是由(20) 和(21) 式可得 $\lambda \approx 0$ 时极限环的近似解. 取 $\Delta\lambda = 0.1$, 然后按第2节所述的迭代法, 当达到精度后, 再给 λ 增量 $\Delta\lambda$, 继续同样的迭代过程, 一直到 $\lambda = 1$. 然后固定 $\lambda = 1$, 而变动 γ_0 为 γ_1 . 不断进行上述迭代过程, 就得一串 $\mu(\gamma_k)$, 由此可作出 $\lambda = 1$ 时的曲线 $\mu = \bar{\mu}(\gamma)$, 如图1所示. 当 $\gamma = 0.016$ 时有极小值 $\mu_{\min} \approx -0.53 \times 10^{-5}$; 当 $\gamma \approx 0.026$ 时有极大值 $\mu_{\max} \approx 1.45 \times 10^{-5}$. 结果与文[6] 完全相同. 从图1 可以看出, 当 $-0.53 \times 10^{-5} < \mu < 0$ 时, 方程(24) 有3个极限环包围原点. 而当 $0 < \mu < 0.026$ 时, 方程(24) 有2个极限环. 取 $\mu = -0.274 \times 10^{-5}$, 求得极限环相图如图2所示, 本文用四阶 Runge - Kutta 方法作过比较, 两者完全吻合. 第4个极限环的近似表达式尚难以计算, 图3是用四阶 Runge - Kutta 方法所得的结果.

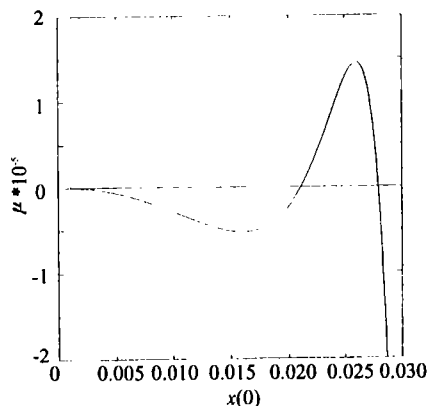


图1 方程(24)极限环的振幅 $x(0)$ 随参数 μ 的变化

Fig.1 Amplitude $x(0)$ of limit cycles of equation (24) versus parameter μ , for $\lambda = 1, \eta = 0.8$ and $\delta = -0.1$

值得指出的是, 改进前的摄动—增量法是求

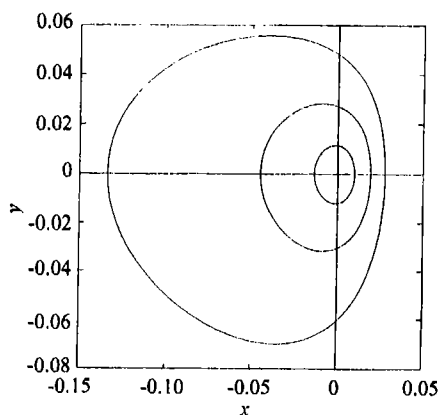


图2 方程(24)包围原点(0,0)的极限环

Fig.2 Limit cycles around (0, 0) for equation (24) with $\lambda = 1$, $\eta = 0.8$, $\delta = -0.1$ and $\mu = -0.274 \times 10^{-5}$

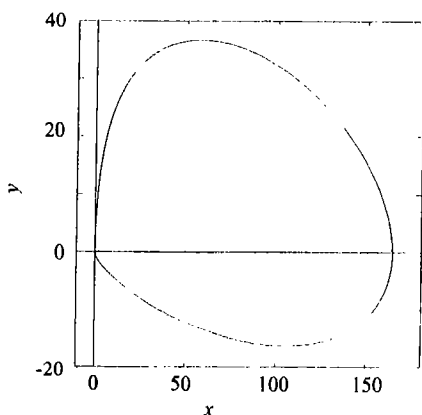


图3 方程(24)包围点(1,0)的极限环

Fig.3 Limit cycle around (1, 0) for equation (24) with $\lambda = 1$, $\eta = 0.8$, $\delta = -0.1$ and $\mu = -0.274 \times 10^{-5}$

不出本例的3个极限环的. 正因为如此, 我们才对摄动一增量法提出改进, 尽管这个方法能求出其它算例的极限环.

例2

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + (d + l/a)x + lx^2 + mxy - y^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 \end{aligned} \quad (26)$$

文[8]指出, 当 $a = 0.25$, $d = -3.899$, $l = 0.98$, $m = 4$ 时, 这个方程在原点外围有3个极限环, 而文[7]则指出方程(26)最多只有2个极限环. 现用本文方法来研究. 令 $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$, $\mu = d + l/a$, 把方程(26)改写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + 0.25\lambda y^2 \\ \dot{y} &= -x - x^2 + \lambda(\mu y + 4xy + 0.98y^2) \end{aligned} \quad (27)$$

其中, $0 < \lambda \leq 1$. 本例 $f = 0.25\lambda y^2$, $h = \mu y + 4xy + 0.98y^2$, $g = x + x^2$, 因而 $V(x) = x^2/2 + x^3/3$.

当 $\lambda \approx 0$ 时, 由方程(19), (21) 和(22) 得

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1 + \sqrt{1 - 4a_1^2/3})/2 \\ \Phi_0(\varphi) &= [1 + 2a_0 + (2a_1 \cos \varphi)/3]^{1/2} \quad (28) \\ \mu_0 &= I_1/I_2 \\ I_1 &= -4 \int_0^{2\pi} (a_1 \cos \varphi + a_0) \Phi_0 \sin^2 \varphi d\varphi \\ I_2 &= \int_0^{2\pi} \Phi_0 \sin^2 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

令 $a_1 = 0.05$, 代入上式可得 $a_0 = -8.5 \times 10^{-4}$, $\mu_0 = 0.0024$, 按例1的计算步骤, 先增量 λ , 当 $\lambda = 1$ 时, 变动 γ_0 为 $\gamma_k = \gamma_0 + 0.02k$, $k = 1, 2, \dots$. 由此作出 $\lambda = 1$ 时的曲线 $\mu = \bar{\mu}(\gamma)$ 如图4所示. 从图4可以看出, 当 $\gamma = x(0) \approx 0.9$ 时, $\bar{\mu}(\gamma)$ 有一个极大值 $\mu = \mu^* \approx 0.020839$, 然后极平缓地下降. 由此可见当 $\mu > \mu^*$ 时没有极限环, 当 $\mu < \mu^*$ 时, 给定 μ 值与曲线 $\bar{\mu}(\gamma)$ 最多有2个交点, 即方程(27)最多有2个极限环. 而在方程(26)中, 当 $a = 0.25$, $d = -3.899$, $l = 0.98$ 时, $\mu = d + l/a = 0.021 > \mu^*$. 即此时方程(27)没有极限环. 因此, 本文的结论与文[7]一致, 方程(27)最多有2个极限环.

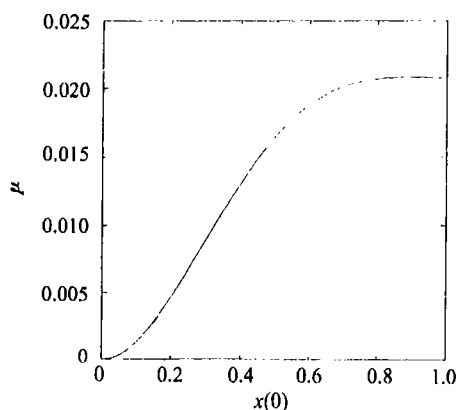
图4 方程(27)极限环的振幅 $x(0)$ 随 μ 的变化

Fig.4 Amplitude $x(0)$ of limit cycles of equation (27) versus parameter μ , for $\lambda = 1$

4 结论

改进后的摄动一增量法更适用于一般平面动力系统的极限环计算, 更容易求出参数曲线方程 $\bar{\mu}(\gamma)$, 并由此求出参数的不同值对应的极限环个数, 同时可作出极限环的相图及其近似表达式. 本文2个算例, 一个求出、改进了前原方法难以计算的二次系统的4个极限环, 另一个例子给出了某具有争议的算例的结果, 这说明本方法

的功效. 它是与 Runge - Kutta 方法不同的另一种计算极限环的有效方法.

参考文献:

- [1] CHAN H S Y, CHUNG K W, XU Z. A perturbation-incremental method for strongly non-linear oscillators [J]. International J Non-linear Mechanics, 1996, 31: 59 - 72.
- [2] XU Z, CHAN H S Y, CHUNG K W. Separatrices and limit cycles of strongly nonlinear oscillators by the perturbation - incremental method [J]. Nonlinear Dynamics, 1996, 11: 213 - 233.
- [3] 陈树辉, 黄武林, 徐兆. Liénard 方程半稳定极限环的计算 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 1998, 37(6): 5 - 9.
- [4] 陈树辉, 黄顿彪, 徐兆. 一类平面微分方程极限环的计算 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 2000, 39(3): 1 - 5.
- [5] 史松龄. 二次系统 (E_2) 出现至少四个极限环的例子 [J]. 中国科学, 1979(11): 1051 - 1056.
- [6] CHAN H S Y, CHUNG K W, QI D W. Bifurcating limit cycles in quadratic polynomial differential systems [C]. Dynamics Days Asia - Pacific: First International Conference on Nonlinear Science, 13 - 16 July, 1999, HongKong Baptist University.
- [7] CHAN H S Y, CHUNG K W, QI D W. Studies in some bifurcation diagrams for limit cycles of quadratic differential systems [J]. International J Bifurcation and Chaos, 2001, 11(1): 197 - 206.
- [8] YAN Z, LUO D J. Study of limit cycles bifurcations of quadratic systems of type II, III [J]. 南京大学学报数学半年刊, 1995, 12(1): 10 - 16.

A Modification of the Perturbation-Incremental Method for Limit Cycle Analysis of Dynamic Systems

CHEN Shu-hui, HUANG Wu-lin, XU Zhao

(Department of Applied Mechanics and Engineering,
Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The perturbation-incremental method is modified for limit cycle analysis of dynamic systems. The solution of the limit cycles is assumed to be a more general form such that the method is suitable for the computation of limit cycle and its bifurcation of the general planar dynamic systems. The essence of this method is to construct an approximate analytical expression in terms of finite Fourier series for the limit cycle. Firstly, the governing differential equations are transformed into linearized incremental equations. Then a set of linearized algebraic equations in terms of Fourier coefficients is set up by using the harmonic balance method. This method is visual and simple. The numerical examples show that the present method is very efficient and accurate. Some limit cycles, which could not be found by using the former method, have been calculated.

Keywords: dynamic system; limit cycle; bifurcation; perturbation-incremental method