

凯勒—黎兹流上的梯度型扩张孤立子^{*}

关彦辉

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘要: 在 C^n 上找到了所有 (包括不完备) 的旋转对称的梯度型扩张孤立子, 并对这些孤立子的截面曲率符号进行了研究, 得到了一类截面曲率为负的不完备的扩张孤立子.

关键词: 凯勒—黎兹流; 扩张孤立子; 截面曲率.

中图分类号: O186.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 06-0003-04

曹怀东于 1997 年在 C^n 上找到了一族完备的旋转对称的梯度型扩张孤立子, 本文在曹的工作的基础上继续深入研究.

设 M^n 为一 n 维完备凯勒流形, 则 M^n 上的凯勒—黎兹流为

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}} = -R_{i\bar{j}}$$

若上方程的关于 $t \geq 0$ 的解 $g_{i\bar{j}}(t)$ 沿着一单参数双同态族流动, 且同时发生了扩张, 则称 $g_{i\bar{j}}(t)$ 为凯勒—黎兹扩张孤立子. 若取此双同态族为一全纯向量场 $V = (V^i)$ 时, 本文得到一扩张孤立子满足

$$V_{i,\bar{j}} + V_{\bar{j},i} = R_{i\bar{j}} + g_{i\bar{j}}$$

特别地, 取 $V = \nabla f$, 其中, f 是 M^n 上的一实值函数, 则 V 全纯将等价于 $R_{i\bar{j}} - g_{i\bar{j}} = f_{,i\bar{j}}$ 和 $f_{,i\bar{j}} = 0$. 本文的主要结果是以下定理:

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, C^n 上存在不完备、旋转对称的梯度型凯勒—黎兹扩张孤立子, 且此类孤立子的截面曲率必恒为负.

最后, 还研究这种孤立子的一些性质.

1 C^n 上的梯度型扩张孤立子

首先, 留意到度量是否满足凯勒条件依赖于凯勒位势 $\Phi = \Phi(z, \bar{z})$ 是否存在, 其中, Φ 为一局部定义, 不依赖局部坐标 $(z, \bar{z})$, 不惟一的光滑实值函数, 且满足

$$g_{i\bar{j}}(z, \bar{z}) = \partial_i \partial_{\bar{j}} \Phi(z, \bar{z})$$

其次, 参看文 [1], 对于 C^n 上在 $U(n)$ 作用下不变的凯勒度量 $g_{i\bar{j}} dz^i dz^{\bar{j}}$, 凯勒位势均可表为

$$\Phi(z, \bar{z}) = u(s), \quad s = \ln |z|^2$$

其中, $u(s)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上满足下面展式的某光滑函数,

$$u(s) = a_0 + a_1 e^s + a_2 e^{2s} + \cdots, \quad (a_1 > 0) \quad (1)$$

反过来, 对某一函数 $u(s)$, 当且仅当满足条件 (1) 和下式 (2) 时, 它将可在 C^n 上生成一个正定的凯勒度量 (当然在 $U(n)$ 作用下是不变的),

$$u'(s) > 0, \quad u''(s) > 0,$$

$$\forall s \in (-\infty, +\infty) \quad (2)$$

显然, 对任意的光滑函数 $u(s)$, $s = \ln |z|^2$, 都有

$$g_{i\bar{j}}(s) = \partial_i \partial_{\bar{j}} u(s) = e^{-s} u'(s) \delta_{i\bar{j}} + e^{-2s} z_{\bar{j}} (u''(s) - u'(s)) \quad (3)$$

$$g_{i\bar{j}}(s) = \frac{e^{\delta_{i\bar{j}}}}{u'(s)} + z_{\bar{j}} z_i \left[\frac{1}{u''(s)} - \frac{1}{u'(s)} \right] \quad (4)$$

而对于 C^n 上的旋转对称度量 $g_{i\bar{j}}$, 有

$$\det(g_{i\bar{j}})(s) = \det(g_{i\bar{j}})(e^{\frac{s}{2}}, 0, \cdots, 0) = \det \begin{bmatrix} e^{-s} u''(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-s} u'(s) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-s} u'(s) \end{bmatrix} = e^{-ns} u'(s)^{n-1} u''(s)$$

令

$$f(s) = -\ln \det(g_{i\bar{j}})(s) = ns - (n-1) \ln u'(s) - \ln u''(s) \quad (5)$$

则 $R_{i\bar{j}} + g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} (f + u)$

由式 (4), $f+u$ 的梯度向量场 V 满足,

* 收稿日期: 2001-02-20; 作者简介: 关彦辉 (1972—), 男, 博士.

$$V^i = g^{\bar{j}} e^{-s} z_{\bar{j}} (f' + u') = z_i \frac{f'(s) + u'(s)}{u''(s)}$$

于是 V 全纯等价于

$$f'(s) + u'(s) = C_1 u''(s) \quad (6)$$

其中, $C_1 \neq 0$ 为某常数.

由 (5) 式, 有

$$f'(s) = n - (n-1) \frac{u''(s)}{u'(s)} - \frac{u'''(s)}{u''(s)}$$

代入方程 (6), 并记 $\varphi = u'$, 得

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + \left[\frac{n-1}{\varphi} + C_1 \right] \varphi' = n + \varphi$$

因为 $\lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi'(s) = 0$, 可求得上述微分方程的解为

$$\varphi' = \frac{\varphi}{C_1} + \frac{(-1)^n (1-C_1) n!}{C_1^{n+1} \varphi^{n-1}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k C_1^k}{k!} \cdot \varphi^k - e^{-C_1 \varphi} \right] \quad (7)$$

记 $\Psi = -C_1 \varphi$, 上式可化为

$$C_1 \Psi' = \Psi + \frac{(C_1-1)n!}{\Psi^{n-1}} \left[e^{\Psi} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Psi^k}{k!} \right]$$

或等价地

$$C_1 \Psi' = \Psi + (C_1-1)n! \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Psi^{k+1-n}}{k!} \quad (8)$$

利用下文引理 3, 常微分方程 (8) 的解满足下列条件:

(1) 当 $C_1 > 1$ 时, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{\Psi \rightarrow -\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Psi^{k+1-n}}{k!} &= \\ \lim_{\Psi \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{\Psi}}{\Psi^{n-1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Psi^{k+1-n}}{k!} \right] &= 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Psi^{k+1-n}}{k!} &= 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Psi^{k+1-n}}{k!} &= +\infty \end{aligned}$$

所以方程 (8) 必存在解 Ψ , 且 Ψ 或为完备负解, 或恒为零, 或存在 $S \in \mathbf{R}$ 使 Ψ 为 $(-\infty, S)$ 上正解且满足 $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Psi = +\infty$;

(2) 当 $C_1 = 1$ 时, 直接可解出方程 (8) 的解为

$$\Psi = C e^s = C |z|^2$$

其中, C 为某常数, 则

$$g_{ij}(t) = C \hat{g}_{ij}$$

(3) 当 $C_1 < 1$ 且 $C_1 \neq 0$ 时, 方程 (8) 必存在解 Ψ , 且 Ψ 或为完备负解, 或恒为零, 或为完备正解, 且存在 $S \in \mathbf{R}$ 使 $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Psi = S$.

最后, 记 ρ 为与 g 有关从零点出发的距离函数, 则

$$\rho(s) = \int_{-\infty}^s |z(t)| dt = \int_{-\infty}^s \sqrt{\varphi'(t)} dt$$

由 (7) 式, 当 $s \rightarrow +\infty$ 时 φ' 渐近于 φ'/C_1 ,

故 ρ 渐近于 $|z| \frac{1}{C_1}$. 于是联立 (2) 式, 只要选取 $C_1 \neq 1$, 可在 $C_1 > 0$ 时找到某 $\Psi < 0$ 时生成一完备旋转对称的梯度型凯勒—黎兹扩张孤立子, 在 $C_1 < 0$ 时找到某 $\Psi > 0$ 生成一不完备旋转对称的梯度型凯勒—黎兹扩张孤立子. 下一节将研究这些孤立子截面曲率的符号以完成定理 1 的证明.

2 截面曲率的符号

首先, 任取两 (实) 切向量 $X = \operatorname{Re} v^i \partial_i$, $Y = \operatorname{Re} w^j \partial_j$, 满足 $\|X \wedge Y\| \neq 0$, 则 X 和 Y 张成的截面曲率为

$$\|X \wedge Y\|^{-2} R_{i\bar{j}kl} (v^i w^{\bar{j}} - w^i v^{\bar{j}}) (w^k v^{\bar{l}} - v^k w^{\bar{l}})$$

所以上节得到的孤立子 $g_{ij}(t)$ 的截面曲率的符号依赖于

$$R_{i\bar{j}kl} (v^i w^{\bar{j}} - w^i v^{\bar{j}}) \cdot (w^k v^{\bar{l}} - v^k w^{\bar{l}})$$

的符号, 其中 (v^i) 与 (w^i) 取遍所有满足 $\|X \wedge Y\| \neq 0$ 的组合. 不失一般性, 不妨设

$$v^i = 0 \text{ for } i \geq 2, w^i = 0 \text{ for } i \geq 3$$

由 $g_{ij}(t)$ 的旋转对称性, 只需在点 $P = (z_1, 0, \dots)$,

0) 上求曲率. 直接运算后可得 (可参考文献 [2]),

$$R_{i\bar{j}kl} (v^i w^{\bar{j}} - w^i v^{\bar{j}}) (w^k v^{\bar{l}} - v^k w^{\bar{l}}) = e^{-2s} \left[\left\{ \frac{\varphi''^2}{\varphi'} - \varphi''' \right\} |v^1 w^{\bar{1}} - w^1 v^{\bar{1}}|^2 + \left\{ \frac{\varphi'^2}{\varphi} - \varphi'' \right\} |v^1 w^2|^2 \right], \text{ for } z_1 \neq 0$$

$$\text{和 } R_{i\bar{j}kl} = e^{-2s} (\varphi - \varphi') \cdot (\hat{g}_{il} + \hat{g}_{il} \hat{g}_{\bar{k}}), \text{ for } z_1 = 0.$$

由 Ψ 的定义, 易见 $g_{ij}(t)$ 的截面曲率的符号依赖于

$$\frac{1}{\lambda} (\Psi' - \Psi), \frac{1}{\lambda} (\Psi'' - \frac{\Psi'^2}{\Psi}), \frac{1}{\lambda} (\Psi''' - \frac{\Psi''^2}{\Psi'})$$

的符号. 再利用下面的引理 3, 可知当 $C_1 > 1$ 或 $0 < C_1 < 1$ 时, 方程 (8) 的一解 $\Psi < 0$ 可生成一截面曲率恒正或恒负的、完备的、旋转对称的梯度型凯勒—黎兹扩张孤立子; 当 $C_1 < 0$ 时, 方程 (8) 的一解 $\Psi > 0$ 可生成一截面曲率恒负的、不完备的、旋转对称的梯度型凯勒—黎兹扩张孤立子. 由此, 本文主要定理得证.

现在, 为了完成证明, 介绍下面 2 个引理.

引理 2 $\forall m \in \mathbf{Z}^+, \text{ 令 } f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ 满足}$
 $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0$
且 $\exists k \in \overline{\mathbf{Z}} \text{ s.t. } \frac{f^{(m)}(x)}{x^k} > 0$
则对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $\frac{f^{(m)}(x)}{x^{m+k}} > 0$.

证明 因为 $\frac{f^{(m)}(x)}{x^k} > 0$ 及 $(x^{m+k})^{(m)} = \frac{(m+k)!}{k!} \cdot x^k$, 所以 $f^{(m-1)}$ 和 $(x^{m+k})^{(m-1)}$ 增减性一致, 又由 $f^{(m-1)}(0) = (x^{m+k})^{(m-1)}(0) = 0$ 和 $(x^{m+k})^{(m-1)}$ 在 $\mathbf{R}^+$ 和 $\mathbf{R}^-$ 中符号不变, 得 $\frac{f^{(m-1)}(0)}{(x^{m+k})^{(m-1)}} > 0$; 因此 $f^{(m-2)}$ 和 $(x^{m+k})^{(m-2)}$ 的增减性也一致, 再由 $f^{(m-2)}(0) = (x^{m+k})^{(m-2)}(0) = 0$ 和 $(x^{m+k})^{(m-2)}$ 在 $\mathbf{R}^+$ 和 $\mathbf{R}^-$ 中符号不变, 得 $\frac{f^{(m-2)}}{(x^{m+k})^{(m-2)}} > 0$; $\dots$; 如此类推, 结论得证.

注记 1 特别地, 取 $f_m(x) = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ 则 $f'_m = f_{m-1}$, 故 $f_m^{(m)}(x) = f_0(x) = e^x > 0$ 满足条件, 可推出 $\sum_{i=m}^{\infty} \frac{x^{i-m}}{i!} > 0$;

注记 2 特别地, 取 $f_m(x) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(i-m)x^i}{i!}$
则 $f'_m = f_{m-1}$, 故 $\frac{f_m^{(m)}(x)}{x} = \frac{f_0(x)}{x} = \frac{xe^x}{x} = e^x > 0$

满足条件, 可推出 $\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(i-m)x^{i-m-1}}{i!} > 0$

注记 3 特别地, 取 $f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(k+1-m)(k-m)\Psi^k}{k!}$
则 $f'_m = f_{m-1}$, 故 $\frac{f_m^{(m-1)}(x)}{x^2} = \frac{f_1(x)}{x^2} = \frac{x^2e^x}{x^2} = e^x > 0$

满足条件, 可推出 $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(k+1-m)(k-m)\Psi^{k-m-1}}{k!} > 0$

引理 3 设 $\Psi \neq 0$ 为方程(8) 满足初始条件 $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Psi'(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \Psi(s) = 0$
的解, 且当 $C_1 < 0$ 时 $\Psi > 0$, 当 $0 < C_1 < 1$ 时 $\Psi < 0$. 则任取 $s \in (-\infty, +\infty)$, $\frac{\Psi'}{\Psi} > 0$, 及 Ψ'

$-\Psi, \Psi'' - \frac{\Psi'^2}{\Psi}, \Psi''' - \frac{\Psi''^2}{\Psi'}$ 与 $\frac{C_1-1}{C_1}$ 符号一致.

证明 当 $\Psi \neq 0$ 时, 方程 (8) 等价于 $\frac{C_1 \Psi'}{\Psi} = 1 + (C_1 - 1) n! \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Psi^{k-n}}{k!}$ (9)

故由上面的注记 1, 有

- (1) 当 $C_1 \geq 1$ 时, 立有 $\frac{\Psi'}{\Psi} > 0$;
- (2) 当 $C_1 < 1$ 时, 因为 $\lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\Psi'}{\Psi} = 1$, 及初始条件

$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Psi'(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \Psi(s) = 0$
所以在 $\mathbf{R}$ 上 $\Psi < 0$, 或 $\Psi > 0$ 且存在 $S \in \mathbf{R}$, 使 $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Psi(s) = S$.

- 1) 若 $\Psi < 0$ 且 $0 < C_1 < 1$, 因为

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Psi^{k-n}}{k!} = \frac{1}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Psi^{k-n}}{k!}$$

及 $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Psi^{k-n}(s_0)}{k!} < 0$

得 $0 < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Psi^{k-n}(s_0)}{k!} < \frac{1}{n!}$

所以 $1 > \frac{C_1 \Psi'}{\Psi} > C_1$, 即 $\frac{\Psi'}{\Psi} > 1$;

- 2) 若 $\Psi > 0$ 且 $C_1 < 0$, 由式(1), 得

$$\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{1}{C_1} + (1 - \frac{1}{C_1}) n! \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Psi^{k-n}}{k!} > 1$$

再利用方程 (8), 可验证下列式子:

$$\begin{aligned} \Psi' - \Psi &= \frac{(C_1 - 1)n!}{C_1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Psi^{k+1-n}}{k!} \\ \Psi'' - \frac{\Psi'^2}{\Psi} &= \frac{(C_1 - 1)n!}{C_1} \Psi' \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(k-n)\Psi^{k-n}}{k!} \\ \Psi''' - \frac{\Psi''^2}{\Psi'} &= \frac{(C_1 - 1)n!}{C_1} \Psi'^2 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(k+1-n)(k-n)\Psi^{k-n-1}}{k!} \end{aligned}$$

于是利用引理 2 的注记及 $\frac{\Psi'}{\Psi} > 0$, 引理得证.

参考文献:

[1] EUGENIO C. Extremal Kähler metrics, seminar on differential geometry[M]. Princeton: Princeton University Press, 1982. 259— 290.
[2] CAO H D. Existence of gradient Kähler-Ricci soliton, Elliptic and Parabolic Methods in Geometry[M]. New York: A K Peters Ltd, 1996. 1— 16.

Existence of Gradient Kähler Ricci Expanding Soliton

GUAN Yan hui

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The existence of gradient Kähler Ricci expanding solitons on $\mathbb{C}^n$ and signs of their section curvatures are studied. A type of incomplete solitons with negative sectional curvature is obtained.

Keywords: Kähler Ricci flow; expanding soliton; sectional curvature

(上接第 2 页)

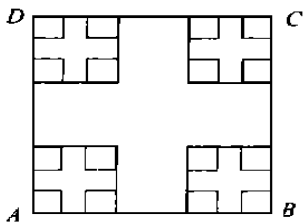


图 3 三分 Cantor 集的笛卡尔积

Fig. 3 The Cartesian product of the middle third Cantor set by itself

参考文献:

- [1] FALCONER K J. The geometry of fractal sets[M] . London: Cambridge University Press, 1985.
- [2] 周作领. Koch 曲线和 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度 [J] . 自然科学进展, 1997, 7(4): 405—409.
- [3] 周作领. 自相似集的 Hausdorff 测度——Koch 曲线 [J] . 中国科学(A 辑), 1998, 28(2): 103—107.

The Upper Convex Density and Hausdorff Measure ——the Koch Curve

ZHU Zhi-wei¹, ZHOU Zuo-ling²

- (1. School of Mathematics and Computing, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China;
- 2. Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The relationship between the Hausdorff measure and the upper convex density of an endpoint for the Koch curve is studied. By the self-similarity of the Koch curve, the upper convex density for an endpoint is discussed and that it is less than 1 is also proved.

Keywords: Koch curve; Hausdorff measure; upper convex density