

浅海硬障碍物边界的重建算法*

张伯坚

(广东农工商职业技术学院电子与信息工程系, 广东 广州 510507)

摘 要: 研究三维浅海硬障碍物声波的反散射问题, 其中假设浅海海面是自由释放边界, 海底是绝对硬的, 障碍物边界也是绝对硬的. 此问题可转化为边界积分方程. 给出反散射问题的重建算法.

关键词: 反散射; 硬障碍物; 外向辐射条件; 亥姆霍兹方程

中图分类号: O175.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 04-0058-03

1 浅海硬障碍物声波的反散射问题

对声源在点 $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$, 散射问题则可归结为求总体场 $u = u^i + u^s$, 使得:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = -\delta(x - x_0), & x \in R_d^3 \setminus \bar{\Omega} & (1) \\ u = 0, & x_3 = 0 & (2) \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, & x_3 = d & (3) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega & (4) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial r} - ika_n \tilde{\psi}_n \right) = 0, & n = 0, 1, 2, \dots & (5) \end{cases}$$

这里 u^i 是入射波, u^s 是散射波,

$$k \neq \frac{(2n+1)\pi}{2d}, n = 0, 1, \dots$$

$$u^s = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}(x^*) \varphi_n(x_3), x^* = (x_1, x_2),$$

$$\varphi_n(x_3) = \sin[k(1 - a_n^2)^{1/2} x_3],$$

$$a_n = \left[1 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4k^2 d^2} \right]^{1/2}$$

条件(5)称为外向辐射条件.

这里 $R_d^3 = \{x: x \in R^3, 0 \leq x_3 \leq d\}$, 其中 Ω 是漂浮在浅海 R_d^3 中的硬障碍物.

散射波 u^s 满足如下方程

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0, & x \in R_d^3 \setminus \bar{\Omega} & (1') \\ u^s = 0, & x_3 = 0 & (2') \\ \frac{\partial u^s}{\partial x_3} = 0, & x_3 = d & (3') \\ \frac{\partial u^s}{\partial \nu} = -\frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu}, & x \in \partial\Omega & (4') \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial r} - ika_n \tilde{\psi}_n \right) = 0, & n = 0, 1, 2, \dots & (5') \end{cases}$$

在文[4]给出了唯一性定理证明. 以下我们考虑反散射问题: 给出 $u(x, x_0) (\forall x \in A, \forall x_0 \in B)$, 确定 $\partial\Omega$. 对应于这个反散射问题的背景是: 在平面 B 给出声源, 在平面 A 通过声纳装置接收散射波 (平面 A 与 B 严格在 Ω 上), 由此确定不明物体 Ω 的形状.

2 一类区域边界的重建方法

在给出算法之前我们先讨论以下算子性质,

$\forall \varphi \in L^2(\partial\Omega)$, 令

$$T\varphi(x) = \int_{\partial\Omega} G(x, y) \varphi(y) ds(y), x \in A \quad (6)$$

为便于讨论, 我们引入带权的 Sobolev 空间 $F^{0,s}(R^2)$:

$$F^{0,s}(R^2) = \{u \mid (1 + |x|^2)^{s/2} u \in L^2(R^2)\} \quad (7)$$

它装备以范数:

$$\|u\|_{F^{0,s}(R^2)} = \|(1 + |x|^2)^{s/2} u\|_{L^2(R^2)} \quad (8)$$

注意到 $y \in \partial\Omega, |x| \rightarrow \infty$ 时, 存在常数 C 一致有

$$|G(x, y)| < C |x^*|^{-1/2}$$

这里

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in A, x^* = (x_1, x_2) \quad (9)$$

由式(6)~(9)知 T 是 $L^2(\partial\Omega) \rightarrow F^{0,s}(A) (s > 1/2)$ 的线性有界算子.

定理 1^[2] 如果 $\partial\Omega \in C^2$, 则(6)定义的算子 T 是 $L^2(\partial\Omega) \rightarrow F^{0,s}(A) (s > 1/2)$ 的紧算子.

定理 2 如果 $\partial\Omega \in C^2$, 并且假设以下的混合边界值问题没有非平凡解:

* 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (990228)

收稿日期: 2001-01-19; 作者简介: 张伯坚 (1964-), 男, 博士.

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x_3 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, & x_3 = d \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

则 T 是单射且其值域于 $F^{0,-s}(A)$ 是稠密的 ($s > 1/2$).

证明 我们首先证明 T 是单射.

事实上, 如果 $T\varphi = 0$, 即

$$\int_{\partial\Omega} G(x, y) \varphi(y) ds(y) = 0, x \in A \quad (11)$$

令

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} G(x, y) \varphi(y) ds(y), x \in R_d^3 \setminus \partial\Omega \quad (12)$$

这里我们首先考虑 $\varphi \in C(\partial\Omega)$, 由 Green 函数性质易知 $u(x)$ 在 $R_d^3 \setminus \bar{\Omega}$ 满足 Helmholtz 方程及外向辐射条件, 同时由式 (10) ~ (12).

$$x \in A \cup \{x: x_3 = 0\} \text{ 时}, u(x) = 0$$

类似文 [4] 的证明, 我们有

$$u(x) = 0, \forall x \in R_d^3 \setminus \bar{\Omega} \quad (13)$$

对 (12) 利用跳跃关系得

$$\varphi - K'\varphi = 0, x \in \partial\Omega \quad (14)$$

这里,

$$K'\varphi(x) = 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_x} G(x, y) \varphi(y) ds(y), x \in \partial\Omega \quad (15)$$

而满足 (14) 的 φ 确定 (12) 的 $u(x)$ 是 (10) 的解, 由定理假设

$$u(x) \equiv 0, x \in \Omega \quad (16)$$

故由 (12)、(16) 及跳跃关系有

$$\varphi + K'\varphi = 0, x \in \partial\Omega \quad (17)$$

因而由 (14)、(17) 立即有

$$\varphi \equiv 0, x \in \partial\Omega \quad (18)$$

由于 K' 是紧算子, $I - K'$ 的零空间在 $C(\partial\Omega)$ 及 $L^2(\partial\Omega)$ 中是完全重合的, 故 T 是单射.

下面证明 T 的值域于 $F^{0,-s}(A)$ 是稠密的.

若存在 $\psi \in F^{0,-s}(A)$ 使

$$\langle \psi, T\varphi \rangle_{F^{0,-s}(A)} = 0, \forall \varphi \in L^2(\partial\Omega) \quad (19)$$

由于 $\langle \psi, T\varphi \rangle = \langle T^* \psi, \varphi \rangle$, 我们往证 $\psi \equiv 0$. 事实上只需证 $T^* \psi = 0$, 有 $\psi \equiv 0$ 即可.

这里 $T^*: F^{0,-s}(A) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ 是 T 的伴随算子, 且

$$T^* \psi(y) = \int_A G(x, y) \psi(x)$$

$$(1 + |x^*|^2)^{-s} ds(x), y \in \partial\Omega \quad (20)$$

令

$$v(y) = \int_A G(x, y) \psi(x)$$

$$(1 + |x^*|^2)^{-s} ds(x), y \in R_d^3 \setminus A \quad (21)$$

类似于 $u(x) = 0$ 的证明, 我们有

$$v(y) \equiv 0, x \in R_d^3 \quad (22)$$

因而 $\psi(y) \equiv 0, y \in A$.

至此定理 2 证毕.

以下给出具体构造边界算法. 总体场 u 满足

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = -\delta(x - x_0), x \in R_d^3 \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} u = 0, & x_3 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, & x_3 = d \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (26)$$

假设硬障碍物 Ω 的边界有以下参数表示

$$\partial\Omega := \{x_1, x_2, x_3\} \mid x_1 = x_1(\sigma, \tau),$$

$$x_2 = x_2(\sigma, \tau), \quad x_3 = x_3(\sigma, \tau),$$

$$0 \leq \sigma \leq L_1, \quad 0 \leq \tau \leq L_2 \quad (27)$$

我们用 Ω_n 来逼近 Ω , 记一系列未知区域 Ω_n 的边界为

$$\partial\Omega_n := \{x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}\} \mid x_{1n} = x_{1n}(\sigma, \tau),$$

$$x_{2n} = x_{2n}(\sigma, \tau), \quad x_{3n} = x_{3n}(\sigma, \tau)$$

$$0 \leq \sigma \leq L_1, \quad 0 \leq \tau \leq L_2 \quad (28)$$

($\partial\Omega_0$ 可以作为 $\partial\Omega$ 的最初估计值且 $\Omega_0 \supset \Omega$)

若 u, u_n 分别是式 (23) ~ (26) 对应于 Ω, Ω_n 的解, 也即 u_n 满足

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = -\delta(x - x_0), x \in R_d^3 \setminus \bar{\Omega}_n \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} u = 0, & x_3 = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, & x_3 = d \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega_n \end{cases} \quad (32)$$

定义

$$\begin{cases} \delta u_n = u - u_n, \\ \delta x_{1n}(\sigma, \tau) = x_1(\sigma, \tau) - x_{1n}(\sigma, \tau) \\ \delta x_{2n}(\sigma, \tau) = x_2(\sigma, \tau) - x_{2n}(\sigma, \tau), \\ \delta x_{3n}(\sigma, \tau) = x_3(\sigma, \tau) - x_{3n}(\sigma, \tau) \\ \delta \gamma_n(\sigma, \tau) = (\delta x_{1n}(\sigma, \tau), \\ \delta x_{2n}(\sigma, \tau), \\ \delta x_{3n}(\sigma, \tau)) \cdot \nu_n \end{cases} \quad (33)$$

其中, $\mathbf{v}_n$ 是 $\partial\Omega_n$ 的单位外法向量.

将式(33)代入式(29)~(32)并省略 $O(\delta^2)$

以上的高阶项我们有

$$\begin{cases} \Delta \delta u_n + k^2 \delta u_n = 0 & \mathbf{x} \in R_d^3 \setminus \bar{\Omega}_n \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} \delta u_n = 0 & x_3 = 0 \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta u_n}{\partial x_3} = 0 & x_3 = d \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu} \delta u_n = \left(\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} u_n \right) \delta \gamma_n, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_n \end{cases} \quad (37)$$

由式(34)利用单层位势

$$\begin{aligned} \delta u_n(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_n(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \\ \mathbf{x} &\in R_d^3 \setminus \bar{\Omega}_n \end{aligned} \quad (38)$$

由式(37) $\psi_n(\mathbf{y})$ 应满足

$$\begin{aligned} \psi_n(\mathbf{x}) - 2 \int_{\partial\Omega_n} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu_x} \psi_n(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = \\ - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} u_n \right) \cdot \delta \gamma_n \end{aligned} \quad (39)$$

平面 $A := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid \mathbf{x} \in R_d^3, x_3 = a\}$ 严格在 Ω 及 Ω_n 上由(38)有

$$\delta u_n(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_n(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \mathbf{x} \in A \quad (40)$$

对某个给定的阈值 ϵ , 取趋于零序列 $\{\epsilon_n > 0, n = 0, 1, \dots\}$

(1) 对 $n = 0$, 选取最初估计 Ω_0 .

(2) 从式(29)~(32)中求出 $u_n(\mathbf{x})$.

(3) 令 $\delta u_n(\mathbf{x}) = u - u_n$, 从(30)解出 $\psi_n(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega_n$.

(4) 选取 $\epsilon_n > 0$ 使得

$$\delta \gamma_n = \min\{\epsilon_n, \left| \left[\psi_n(\mathbf{x}) - 2 \int_{\partial\Omega_n} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu_x} \psi_n(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right] \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} u_n \right)^{-1} \right|\}$$

(5) 令 $\partial\Omega_{n+1} := \{\mathbf{x}_{n+1} \mid \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \delta \gamma_n(-\mathbf{v}_n), \forall \mathbf{x}_n \in \partial\Omega_n\}$, 这里 $-\mathbf{v}_n$ 是 $\partial\Omega_n$ 在 $\mathbf{x}_n$ 处的单位内法向量, 如果 $|\delta \gamma_n| < \epsilon$, 则迭代停止, 否则重复2至5步骤, 并求出 $u_n, \delta u_n, \psi_n, \delta \gamma_n$ 直到存在某个 m , 使得 $|\delta \gamma_m| < \epsilon$ 为止.

参考文献:

- [1] COLTON D, KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering Theory [M]. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1992.
- [2] GILBERT R P, YONG Z X. The seamount problem [A]. In: ANGELL T S, PAMELA COOK L, et al. Nonlinear problems in applied mathematics [C]. Philadelphia, SIAM, 1996. 140~149.
- [3] GILBERT R P, LIN W. Wavelet solutions for time harmonic acoustic waves in a finite ocean [J]. Comput Acoust, 1993, 1(1): 31~60.
- [4] 张伯坚. 浅海硬障碍物声波的反散射问题[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2000, 39(4): 35~38.

The Algorithm for Constructing the Sound-hard Obstacle Boundary in Shallow Ocean

ZHANG Bo-jian

(Department of Electronics and Information Engineering,
Guangdong AIB Vocational Technology College, Guangzhou 510507, China)

Abstract: The inverse acoustic scattering of sound-hard obstacle in three dimensional shallow ocean with free surface and rigid bottom is investigated. The problem can be reduced to the boundary integral equation. The algorithm for constructing the obstacle boundary is presented.

Keywords: inverse acoustic scattering; sound-hard obstacle; out-going radiation condition; Helmholtz equation