

固体力学中的变分差分方法^{*}

富明慧, 刘祚秋

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 以弹性力学平面问题为例阐述变分差分方程的建立方法、求解过程, 介绍变分差分法在固体力学各领域中的应用. 实例分析表明: 变分差分方法对复杂区域具有较强的适应性和较高的求解精度.
关键词: 变分差分; 复杂区域; 迭代格式
中图分类号: O242 2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 02-0013-03

变分差分法 (又称能量差分法) 是利用变分原理建立差分方程的一种数值方法^[1~3], 它由于具有简便易行、所需存贮量小且精度高等优点, 因而在固体力学的许多领域获得了广泛的应用^[4~8]. 变分差分法与有限元法各有优劣, 可互为补充. 对于条件数较大 (离散后差分方程极度病态) 的问题, 直接解法的适应性较差, 很难保证数值解的精度; 然而高效迭代法在一定程度上可以弥补这一不足. 而就构造高效迭代法而言, 变分差分法较有限元法更有优势. 固体力学中的许多问题由于几何或者物理上的因素, 在离散后差分方程具有较大的条件数 (如裂纹尖端、板壳的三维应力分析以及具有强各向异性的复合材料结构等). 对于此类问题, 文献 [5~7] 表明, 结合高效迭代法的变分差分法可以有效地保证数值解的精度和求解效率, 目前变分差分法已经成为平面问题、空间问题、板壳、复合材料结构分析的重要方法.

本文仅以弹性力学平面问题为例, 说明变分差分法的基本思想, 介绍变分差分方程的建立过程和求解方法.

1 规则区域上的变分差分方程

处于平面应变状态的、单位厚度的弹性体 (图 1), 总势能 Π 为

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= U + V, U = \int_A \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dA, \\ V &= - \int_A f_i u_i dA - \int_L p_i u_i dL \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, A 为求解区域, L 为其边界, Π 为系统总势

能, U 为应变能, V 为外力势能, C_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2$) 为弹性张量, f_i 和 p_i 分别为体力和面力分量. 本文采用求和约定.
首先考虑区域 A 为矩形的情况. 利用均匀网格将区域 A 离散, 用 (x_I, y_J) 表示网格上第 I 行、第 J 列结点的坐标. 则
$$x_I = x_0 + (I - 1) h_1, (0 \leq I \leq N_1),$$
$$y_J = y_0 + (J - 1) h_2, (0 \leq J \leq N_2)$$
$$h_1, h_2 \text{ 分别是 } x \text{ 和 } y \text{ 方向的步长.}$$

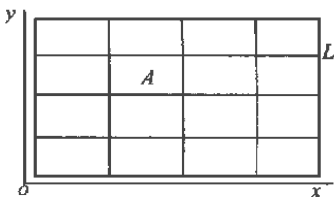


图 1 矩形区域上的均匀网格
Fig 1 Uniform grid in rectangle district

对于 x 的一元函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 定义内积
$$[f, g]_1 = 0.5[(f, g)_1 + 0.5(f, g)_1] \quad (2)$$

其中, $[f, g]_1 = \sum_{I=0}^{N_1-1} f(x_I) g(x_I) h_1, (f, g)_1 = \sum_{I=1}^{N_1} f(x_I) g(x_I) h_1$. 类似地, 对于一元函数 $p(y), q(y)$, 定义内积
$$[p, q]_2 = 0.5[p, q]_2 + 0.5(p, q)_2 \quad (3)$$

其中,
$$[p, q]_2 = \sum_{J=0}^{N_2-1} p(y_J) q(y_J) h_2, (p, q)_2 =$$

^{*} 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19902022)
收稿日期: 2000-06-08; 作者简介: 富明慧, (1966—), 男, 副教授.
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{j=1}^{N_2} p(y_j) q(y_j) h_2$$

在定义式 (2), (3) 基础上, 定义二元函数 $u(x, y), v(x, y)$ 的内积运算如下:

$$[[u, v]] = [[u, v]_1, 1]_2 \quad (4)$$

离散后, 式 (1) 中的线积分及面积分应代以式 (2) ~ (4) 的内积, 而应变能 U 中的位移导数 $u_{i,j}$ 应代之以相应的向前差分导数 $\partial_j^+ u_i$ 或向后差分导数 $\partial_j^- u_i$ (向前或向后差分的选取应使式 (2) ~ (4) 中规定的运算能够进行).

$$\Pi^h = U^h + V^h \quad (5)$$

令
$$\frac{\partial \Pi^h}{\partial u_i(x_I, y_J)} = 0, \quad (i = 1, 2, 0 \leq I \leq N_1, 0 \leq J \leq N_2) \quad (6)$$

可得到一组代数方程, 其算子方程形式为

$$\mathbf{K}^h \cdot \mathbf{u}^h + \mathbf{F}^h = 0 \quad (7)$$

上式中的粗体符号表示算子与向量, 其中 $\mathbf{K}^h$ 称为刚度算子, 它与应变能有关; $\mathbf{F}^h$ 为等效结点力, 它与外力势能有关. $\mathbf{K}^h$ 与 $\mathbf{F}^h$ 由下式确定

$$\mathbf{K}^h \cdot \mathbf{u}^h = \frac{\partial U^h}{\partial \mathbf{u}^h(x_I, y_J)}, \quad \mathbf{F}^h = - \frac{\partial V^h}{\partial \mathbf{u}^h(x_I, y_J)} \quad (8)$$

如果将区域 A 分解为若干子块, 即 $A = \sum_i A_i$, 则系统势能也可相应地分解, 从而 $\mathbf{K}^h$ 与 $\mathbf{F}^h$ 也可进行类似的分解

$$\mathbf{K}_A^h = \sum_i \mathbf{K}_{A_i}^h, \quad \mathbf{F}_A^h = \sum_i \mathbf{F}_{A_i}^h \quad (9)$$

变分差分方程这种可分解 (叠加) 的性质是十分有用的.

2 不规则区域上变分差分方程的建立

如图 2 所示为一不规则平面弹性区域 A , 用图示曲线网格将其离散. 这样的曲线网格实际上确定了一个曲线坐标系 (β^1, β^2) , 它与直角坐标系 (x_1, x_2) 之间的对应关系为

$$x_i = x_i(\beta^j), \quad (i, j = 1, 2) \quad (10)$$

式 (10) 将直角坐标系中的不规则域 A 映射为曲线坐标系 (β^1, β^2) 中的矩形域 A_0 .

定义

$$u_{i|m} = \frac{\partial u_i}{\partial \beta^m}, \quad B_j^m = \frac{\partial \beta^m}{\partial x_j} \quad (11)$$

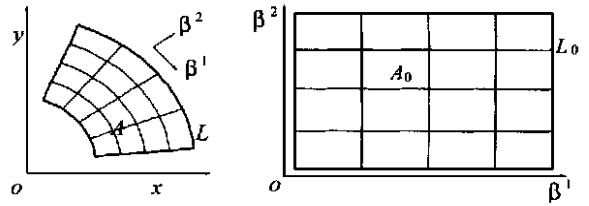


图 2 坐标变换

Fig 2 Coordinate transform

则有
$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \beta^m} \frac{\partial \beta^m}{\partial x_j} = u_{i|m} B_j^m \quad (12)$$

在坐标变换时, 有如下等式:

$$dA = \sqrt{g} dA_0, \quad dL = g^{\alpha\alpha} \sqrt{g} dL_0 \quad (13)$$

其中, $g_{ij} = B_i^m B_j^m$ 为度量张量, $g = \det(g_{ij})$, 在 $g^{\alpha\alpha}$, $(\alpha = 1, 2)$ 这项中不对 α 求和, α 代表 L_0 外法线方向.

由式 (1), (12) 和 (13), 可得

$$\Pi = \int_{A_0} \frac{1}{2} a_{ik}^{mn} u_{i|m} u_{k|n} dA_0 - \int_{A_0} f_i^* u_i dA_0 - \int_{L_0} p_i^* u_i dL_0 \quad (14)$$

其中

$$a_{ik}^{mn} = \sqrt{g} C_{ijk} B_j^m B_l^n, \quad f_i^* = f_i \sqrt{g}, \quad p_i^* = p_i \sqrt{g} g^{\alpha\alpha} \quad (15)$$

比较式 (1) 和式 (14), 可以发现, 不规则域 A 上的弹性力学问题就从形式上转化为矩形域 A_0 上的“弹性力学问题”, 只不过这里的“弹性张量”为 a_{ik}^{mn} , 而“体力”与“面力”为 f_i^* , p_i^* 而已. 这样, 在式 (14) 的基础上, 利用前述处理规则区域的方法, 便可得到所需要的变分差分方程.

值得注意的是, 式 (14) 中的位移与外力分量仍然是直角坐标系中的分量, 因此这里所采用的变换只是几何上的, 是“不完全的变换”.

系数 a_{ik}^{mn} 直接影响刚度算子的性态, 而由式 (15) 可知, 这种影响来源于几何 (B_j^m) 与物理 (C_{ijk}) 两方面因素. 在一般情况下变换式 (10) 不具有解析形式, 系数 B_j^m 需通过数值微分来计算. 在网格不甚光滑的地方, 系数 B_j^m 会发生间断. 为此可将区域分解为若干子域 (图 3), 在每个子域内的网格应具有较好的光滑性, 以保证按式 (11) 计算时的精度. 例如, 图 3 所求区域应分解为 3 个子域. 在材料性质发生突变的地方 (两种材料的界面), 也应进行类似的区域分解. 分解后的每个子域, 是建立变分差分方程的基本

单位，也可称之为“单元”。例如图 3 的求解区域可划分成 2 个“单元”。各子域的变分差分方程建立后，再按式 (9) 将其合并为一个统一的差分方程。

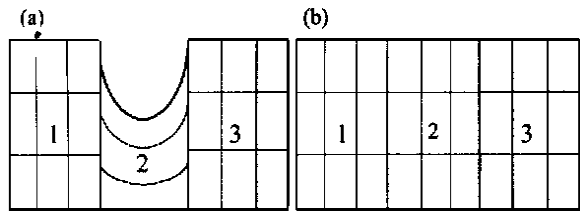


图 3 区域分解

Fig. 3 District decomposing

a 变换前; b 变换后

上面所介绍的区域变换的方法与有限元中的区域变换方法有些相似。变分差分方程 (7) 比较适合于叠代解法。叠代解法的一般形式为

$$D \frac{u_{n+1}^h - u_{gn}^h}{\tau_j} = K^h u_n^h + F^h \quad (16)$$

其中， D 为某一差分算子， τ_j 为迭代参数（一般取为切贝雪夫参数^[2]），通过 D 的选取，便可得到各种迭代法。目前将 D 取为拉普拉斯算子的做法比较流行^[2]，由于拉普拉斯算子的逆运算可利用快速傅里叶变换（FFT）方便地求出，因而具有很高的效率。

3 算 例

用变分差分法分析圆孔周边的应力集中问题作为算例。如图 4 所示，中央开圆孔的正方形薄板，左右侧边受均布的单位拉应力，圆孔半径为 1，板边长为 10。由对称性，只需计算 1/4 的区域。采用图示的曲线四边形网格。图 4 的曲线描述了正应力沿截面 AB 的分布，其中实线与虚线分别对应数值解和解析解，二者是十分吻合的。

由此例也可以看出，变分差分法对复杂区域具有较强的适应性。

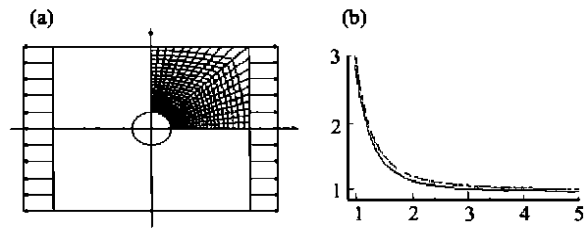


图 4 圆形小孔周边的应力集中

Fig. 4 Stress concentration at peripheral of round hole

(a) 计算区域及网格划分;

(b) y 轴上的正应力分布曲线

参考文献:

[1] MIKHILIN S G. Approximation on a rectangular grid[M]. London: Noordhoff International Publishers, 1979. 1—178.

[2] SAMARSKII A A, NIKOLAEV E S. Numerical methods for grid[M]. Equations, Basel, Boston Berlin, 1989. 1—502.

[3] 李荣华, 冯果沈. 解微分方程的数值方法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980. 1—416.

[4] SINGH J P, DEY S S. Parametric instability of rectangular plates by the energy based finite difference method[J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 1992, 97: 1—21.

[5] KIN H J. Postbuckling analysis of composite laminates with a delamination[J]. Comput & Struct, 1997, 52(6): 975—983.

[6] 富明慧, 姚振汉. 薄壳动力分析的三维半显式迭代算法[J]. 清华大学学报, 1997, 37(11): 23—25.

[7] 富明慧, 刘祚秋. 正交异性回转体静动力分析的变分差分算法[J]. 工程力学, 1998, 15(1): 66—71.

[8] 罗恩, 邵卓民, 魏文郎, 等. 组合型带肋扭壳的广义变分原理及内力分析[J]. 力学学报, 1978(2): 107—124.

Variational-Difference Method in Solid Mechanics

FU Ming-hui, LIU Zuo-qiu

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The construction method and the resolution process of the variational-difference equation are explained with an example of plane problem of elastic mechanics, and its applications in solid mechanics are introduced. The example shows that the variational-difference method has well adaptability and precision for complex region.

Keywords: variational-difference method; complex region; iteration schemes