

# 弱阻尼 Schrödinger 方程的近似惯性流形族<sup>\*</sup>

吴书印, 赵 怡  
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

**摘 要:** 研究弱阻尼 Schrödinger 方程的解的长时间行为, 构造出了一族近似惯性流形, 它们与吸引子的逼近阶数随着初值和外力函数的光滑性提高而提高.

**关键词:** 弱阻尼 Schrödinger 方程; 整体吸引子; 近似惯性流形

**中图分类号:** O175.29 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 02-0010-03

近似惯性流形是由 Foias, Manley, Teman 和 Sell 等在联系到惯性流形理论中所出现的困难而引进的概念. 这种流形是有限维的光滑流形, 它在它的一个小薄邻域内迅速地指数吸引轨道, 而且吸引子就包含在这个邻域内. 关于近似惯性流形的存在性, 针对不同的偏微分方程, 已有很多研究<sup>[1~4]</sup>.

我们研究具有零阶耗散和外力影响的非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{aligned} i u_t + u_{xx} + |u|^2 u + i \Gamma u &= f, \\ x \in \Omega, t \in \mathbf{R}^+ \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\Omega = [0, L] \subset \mathbf{R}$ ,  $\Gamma$  是正常数,  $f = f(x)$  是给定的复值函数.

补充 Dirichlet 边界条件

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (2)$$

或周期边界条件

$$u(x, t) = u(x + L, t) \quad (3)$$

初始条件为

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega \quad (4)$$

Ghidaglia<sup>[5]</sup> 证明了问题 (1) ~ (4) 在  $\mathbf{H}^2$  和  $\mathbf{H}^1$  上分别存在弱的整体吸引子  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{A}^*$ , 并且在空间  $\mathbf{H}^1$  上对  $\mathbf{H}^2$  上的吸引子  $\mathcal{A}$  的 Hausdorff 维数和分形维数的上界进行了估计.

Wang<sup>[6]</sup> 证明了  $\mathbf{H}^2$  上的弱吸引子  $\mathcal{A}$  实际上是强拓扑意义下的紧吸引子.

在文 [3] 中, 当  $u_0 \in \mathbf{H}^3, f \in \mathbf{H}^1$  时, 作者构造出了方程 (1) 的一个显式近似惯性流形和一个隐式近似惯性流形, 它们与吸引子的逼近阶数

是  $K\lambda_{m+1}^{-1/2}$ .

本文将在解的正则性提高的基础上, 对方程

(1) 构造出一族近似惯性流形, 它们与吸引子的逼近阶数随着初值和外力函数的光滑性提高而提高. 当  $u_0 \in \mathbf{H}^{k+2}, f \in \mathbf{H}^k$  时, 逼近阶数为  $c_k \lambda_{m+1}^{-k/2}, k > 1$ .

本文用  $\mathbf{H}^s(\Omega)$  表示通常的 Sobolev 空间,  $\mathbf{H} = L^2(\Omega)$ ,  $\|\cdot\|$  和  $(\cdot, \cdot)$  分别表示  $L^2(\Omega)$  中的内积和模,  $\|\cdot\|_p$  表示  $L^p(\Omega) (1 \leq p \leq \infty)$  中的模,  $\|\cdot\|_X$  表示任意 Banach 空间  $X$  中的模. 另外,  $c$  表示仅与参数有关的任何常数.

## 1 解的性质和解的小构造性质

在  $\mathbf{H}$  上引入无界自伴算子  $Au = -u_{xx}$ , 其定义域为

$$D(A) = \{u \in \mathbf{H}^2(\Omega); (2) \text{ 或 } (3) \text{ 式成立}\}$$

将问题 (1) ~ (4) 写成抽象形式

$$i \frac{du}{dt} - Au + |u|^2 u + i \Gamma u = f \quad (5)$$

$$u(0) = u_0 \quad (6)$$

从文<sup>①</sup>中已经知道, 对于  $f \in \mathbf{H}^k, u_0 \in \mathbf{H}^{k+2}, k \geq 0$ , 问题 (5), (6) 存在惟一解  $u(t) \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{H}^{k+2})$ , 而且

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}^{k+2}} \leq \rho_k, t \geq t_k \quad (7)$$

其中,  $\rho_k$  是依赖于参数  $(\Gamma, \|f\|_{\mathbf{H}^k})$  和  $k$  的常数,  $t_k$  依赖于参数  $(\Gamma, \|f\|_{\mathbf{H}^k})$ ,  $k$  和  $R: \|u_0\|_{\mathbf{H}^{k+2}} \leq R$ .

通过方程 (5) 关于  $x$  微分  $k$  次, 应用结论

\* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19871094); 广东省自然科学基金资助项目 (990229)

收稿日期: 2000-05-24; 作者简介: 吴书印 (1963-), 男, 博士, 副教授.

① 吴书印, 赵怡, 弱阻尼 Schrödinger 方程在空间  $\mathbf{H}^1$  上的吸引子, 数学物理学报, 待发.

(7), 我们可以证得下面引理.

引理 1 设  $f \in H^k, u_0 \in H^{k+2}, k \geq 0$ , 则有

$$\|D_x^k u_t\| \leq c_k, t \geq t_k \tag{8}$$

其中,  $c_k$  是依赖于参数  $(\Gamma, \|f\|_{H^k})$  和  $k$  的常数,  $t_k$  依赖于参数  $(\Gamma, \|f\|_{H^k}), k$  和  $R: \|u_0\|_{H^{k+2}} \leq R$ .

我们考虑由算子  $A$  的特征向量组成的空间  $H$  的正交基  $\{w_j\}$ :

$$Aw_j = \lambda_j w_j$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_j \rightarrow +\infty, j \rightarrow \infty$$

对固定的正整数  $m$ , 用  $P = P_m$  表示  $H$  到  $w_1, \dots, w_m$  所张成子空间上的正交投影, 而  $Q = Q_m = I - P_m$ . 令

$$p = Pu, q = Qu$$

则  $p, q$  在  $PH$  和  $QH$  上分别满足下述方程

$$\begin{aligned} i \frac{dp}{dt} - Ap + P(|p + q|^2(p + q)) + \\ i \Gamma p = Pf \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} i \frac{dq}{dt} - Aq + Q(|p + q|^2(p + q)) + \\ i \Gamma q = Qf \end{aligned} \tag{10}$$

引理 2 在引理 1 的条件下, 有

$$\|q\|, \|\frac{dq}{dt}\| \leq c_k \lambda_{m+1}^{-k/2}, \forall t \geq t_k \tag{11}$$

其中,  $c_k$  是依赖于参数  $(\Gamma, \|f\|_{H^k})$  和  $k$  的常数,  $t_k$  依赖于参数  $(\Gamma, \|f\|_{H^k}), k$  和  $R: \|u_0\|_{H^{k+2}} \leq R$ .

证明 由 (7) 和 (8) 知

$$\|A^{k/2} u\|, \|A^{k/2} u_t\| \leq c_k, \forall t \geq t_k$$

从而

$$\|A^{k/2} q\|, \|A^{k/2} q_t\| \leq c_k, \forall t \geq t_k$$

注意到

$$\begin{aligned} \|A^\alpha v\| &\geq \lambda_{m+1}^\alpha \|v\|, \\ \forall v \in Q_m D(A^\alpha), \alpha > 0 \end{aligned} \tag{12}$$

于是有

$$\|q\|, \|q_t\| \leq c_k \lambda_{m+1}^{-k/2}, \forall t \geq t_k$$

证毕.

## 2 近似惯性流形的构造

我们通过对方程 (10) 的适当的近似来构造近似惯性流形. 根据引理 2 知,  $q$  和  $dq/dt$  对充分大的时间  $t$  是小的. 因此在方程 (10) 中忽略  $dq/dt$ , 而用  $Q(|p|^2 p)$  近似非线性项  $Q(|p + q|^2(p + q))$ . 如此定义映射

$$\phi_1: PH \rightarrow QH$$

使得对每一个  $p \in PH, \phi_1(p) = q_1$  是下述方程的解

$$-Aq_1 + Q(|p|^2 p) + i \Gamma q_1 = Qf \tag{13}$$

下面的引理保证方程 (13) 对充分大的  $m$  存在惟一解.

引理 3 存在一个仅与  $\Gamma$  和  $\Omega$  有关的正整数  $m_0$ , 使当  $m \geq m_0$  时, 对每一个  $p \in PH$ , 方程 (13) 有惟一解  $q_1 \in QH$ .

证明 设  $p \in PH$  固定, 定义映射  $\chi: QH \rightarrow QH$ , 使对任意的  $\varphi \in QH, \chi(\varphi) = \psi$  由下式给出:

$$-A\psi + Q(|p|^2 p) + i \Gamma \psi = Qf \tag{14}$$

显然, 映射  $\chi: QH \rightarrow QH$  的不动点即是方程 (13) 的解.

下面用 Banach 不动点定理证明映射  $\chi$  在  $QH$  上有唯一的不动点, 只需证明  $\chi: QH \rightarrow QH$  是一个压缩映射.

设  $\varphi_1, \varphi_2 \in QH$ , 则由 (14) 可得

$$A\psi_1 - A\psi_2 = i \Gamma (\varphi_1 - \varphi_2)$$

其中,  $\psi_1 = \chi(\varphi_1), \psi_2 = \chi(\varphi_2)$ . 于是

$$\|A\psi_1 - A\psi_2\| = \Gamma \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

利用 (12) 式, 我们推得

$$\|\psi_1 - \psi_2\| \leq \Gamma_{m+1}^{-1} \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

因为  $\lambda_{m+1} \rightarrow +\infty (m \rightarrow \infty)$ , 所以存在仅依赖于  $\Gamma$  和  $\Omega$  的整数  $m_0$ , 使当  $m \geq m_0$  时,  $\chi$  是一个压缩映射. 证毕.

令  $\Sigma_1 = \text{graph}(\phi_1)$ . 下面的定理说明  $\Sigma_1$  是问题 (5), (6) 的近似惯性流形, 同时给出了它与轨道逼近的阶数.

定理 1 设  $f \in H^k, u_0 \in H^{k+2}, k \geq 0$ , 则存在仅与  $\Gamma$  和  $\Omega$  有关的整数  $m_0$ , 使当  $m \geq m_0$  时, 对问题 (5), (6) 的任何解  $u(t)$ , 有

$$\text{dist}_{H^2}(u(t), \Sigma_1) \leq c_k \lambda_{m+1}^{-k/2}, \forall t \geq t_k$$

其中,  $c_k$  是依赖于参数  $(\Gamma, \|f\|_{H^k})$  和  $k$  的常数,  $t_k$  依赖于参数  $(\Gamma, \|f\|_{H^k}), k$  和  $R: \|u_0\|_{H^{k+2}} \leq R$ .

证明 由 (10) 与 (13) 式相减得

$$\begin{aligned} A\psi - Aq = \\ Q(|p|^2 p) - Q(|p + q|^2(p + q)) + \\ i \Gamma (\psi - q) - i \frac{dq}{dt} \end{aligned} \tag{15}$$

因为有 Sobolev 嵌入关系  $H^1 \rightarrow L^\infty$ , 所以

$$\|u\|_{\infty} \leq c \|u\|_{H^1} \leq c$$

$$\|p\|_{\infty}, \|q\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty} \leq c$$

于是

$$\begin{aligned} & \|Q(|p|^2 p) - Q(|p+q|^2(p+q))\| \leq \\ & \| |p|^2 p - |p+q|^2(p+q) \| \leq \\ & \| |p|^2 q \| + \| u(|p|^2 - |p+q|^2) \| \leq \\ & \|p\|_{\infty}^2 \|q\| + \|u\|_{\infty} \|p\bar{q} + \bar{p}q + |q|^2\| \leq \\ & \|p\|_{\infty}^2 \|q\| + 2\|u\|_{\infty} \|p\|_{\infty} \|q\| + \\ & \|u\|_{\infty} \|q\|_{\infty} \|q\| \leq c \|q\| \end{aligned}$$

由 (15), (11) 和 (12) 推得

$$\|A\psi - Aq\| \leq$$

$$c \|q\| + \Gamma \| \psi - q \| + \left\| \frac{dq}{dt} \right\| \leq$$

$$c_k \lambda_{m+1}^{-k/2} + \Gamma_{m+1}^{-1} \|A\psi - Aq\|, \quad \forall t \geq t_k$$

选取  $m_0$ , 使当  $m \geq m_0$  时,  $\Gamma_{m+1}^{-1} \leq 1/2$ , 则有

$$\|A\psi - Aq\| \leq c_k \lambda_{m+1}^{-k/2}, \quad \forall t \geq t_k$$

现在设  $u(t) = p(t) + q(t)$  是问题 (5), (6) 的一个解, 而  $\psi(t) = \phi_1(p(t))$ ,  $\forall t > 0$ , 那么  $p(t) + \psi(t)$  在流形  $\Sigma_1$  上, 因此有

$$\text{dist}_H^2(u(t), \Sigma_1) \leq$$

$$\|u(t) - (p(t) + \psi(t))\|_{H^2} \leq$$

$$\|\psi(t) - q(t)\|_{H^2} \leq \|A\psi - Aq\| \leq c_k \lambda_{m+1}^{-k/2},$$

$$\forall t \geq t_k$$

证毕.

下面构造一族显式惯性流形.

定义映射

$$\phi_2: PH \rightarrow QH$$

使得对每一个  $p \in PH$ ,  $\phi_2(p) = q_2$  是下述方程的解

$$-Aq_2 + Q(|p|^2 p) = Qf$$

$$\text{即 } q_2 = \phi_2(p) = A^{-1}(Q(|p|^2 p) - Qf)$$

令  $\Sigma_2 = \text{graph}(\phi_2)$ . 与证明定理 1 类似, 可以证明下面的定理.

**定理 2** 设  $f \in \mathbf{H}^k$ ,  $u_0 \in \mathbf{H}^{k+2}$ ,  $k \geq 0$ , 则存在仅与  $\Gamma$  和  $\Omega$  有关的整数  $m_0$ , 使当  $m \geq m_0$  时, 对问题 (5), (6) 的任何解  $u(t)$ , 有

$$\text{dist}_H^2(u(t), \Sigma_2) \leq c_k \lambda_{m+1}^{-k/2}, \quad \forall t \geq t_k$$

其中,  $c_k$  是依赖于参数  $(\Gamma, \|f\|_{\mathbf{H}^k})$  和  $k$  的常数,  $t_k$  依赖于参数  $(\Gamma, \|f\|_{\mathbf{H}^k})$ ,  $k$  和  $R$ :  $\|u_0\|_{\mathbf{H}^{k+2}} \leq R$ .

参考文献:

- [1] MARION M. Approximate inertial manifolds for reaction-diffusion equations in higher space dimension[J]. J Amer Math Soc, 1988, 1: 805-866.
- [2] DEBUSSCHE A, MARION M. On the construction of families of approximate inertial manifolds[J]. J Diff Equ, 1992, 100: 173-201.
- [3] GUO B, WANG B. Approximation to the global attractor for a nonlinear Schrödinger equation[J]. Appl Math JCU, 1996, 11B: 125-136.
- [4] 戴正德, 郭柏灵. 惯性流形与近似惯性流形[M]. 北京: 科学出版社, 2000. 35-101.
- [5] GHIDAGLIA J M. Finite dimensional behavior for weakly damped driven Schrödinger equations[J]. Ann Inst Henri Poincaré, Anal Nonlinéaire, 1988, 5(4): 365-405.
- [6] WANG X. An energy equation for the weakly damped driven nonlinear Schrödinger equations and its application to their attractors[J]. Physica D, 1995, 88: 167-175.

## Families of Approximate Inertial Manifolds for the Weakly Damped Schrödinger Equation

WU Shu-yin, ZHAO Yi

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** A sequence of approximate inertial manifolds is constructed for the weakly damped Schrödinger equation. It is shown that the approximate orders of these manifolds to the global attractor increase along with the improvement of the degree of smooth of the initial data and external force function.

**Keywords:** weakly damped Schrödinger equation; global attractor; approximate inertial manifolds