

一类边值问题的高效解法^{*}

富明慧¹, 刘祚秋¹, 李榴芬²
(1. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275;
2. 中山大学地球科学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 在差分方程分块记法的基础上, 将泊松方程的第三边值问题拉普拉斯差分算子的特征矩阵分解为能应用快速富立叶变换 (FFT) 算法的正弦函数矩阵和余弦函数矩阵两部分, 并将 FFT 算法与块追赶法结合起来, 建立了泊松方程第三边值问题的一种高效算法.
关键词: 泊松方程 追赶法 快速富立叶变换
中图分类号: O242.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 03-0010-03

泊松方程的求解具有重要意义. 一方面, 许多客观规律可归结为泊松方程; 另一方面, 一些其它类型方程 (如弹性力学方程) 的迭代解法, 往往以泊松方程的求解为基础^[1~3]. 利用快速富立叶变换 (FFT) 求解泊松方程的方法, 因效率极高而得到广泛的应用^[1~3]. 然而, 目前上述方法还只限于第一边值 (Dirichlet) 问题和第二边值 (Riemann) 问题; 对于第三边值 (Cauchy) 问题, 由于拉普拉斯差分算子的特征向量 (一族离散的三角函数) 的频率不是基频的整数倍, 因而 FFT 算法难以直接应用. 本文在差分方程分块记法的基础上, 将拉普拉斯差分算子的特征矩阵分解为能应用 FFT 算法的正弦函数矩阵和余弦函数矩阵两部分, 并将 FFT 与块追赶法结合起来, 建立了泊松方程第三边值问题的一种高效算法.

1 泊松方程的差分方程的块对角形式

考虑矩形区域上泊松方程的第三边值问题
 $\Delta \phi + g(x, y) = 0, (0 < x < l_1, 0 < y < l_2)$
 $\phi|_{x=0} = \alpha_1(y), \phi|_{y=0} = \beta_1(x)$
 $\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x=l_1} = \alpha_2(y), \frac{\partial \phi}{\partial y}|_{y=l_2} = \beta_2(x) \quad (1)$

用图 1 所示均匀网格将区域离散, 并用 (x_i, y_j) 表示网格上第 j 列、第 i 行结点的坐标, 本文不妨假设 $(m \geq n)$. 对任一二元函数 $f(x, y)$, 记 $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, 则方程 (1) 的差分形式为

$$\begin{aligned} & -\frac{\phi_{(i-1)j} - 2\phi_{ij} + \phi_{(i+1)j}}{h_1^2} \\ & \frac{\phi_{i(j-1)} - 2\phi_{ij} + \phi_{i(j+1)}}{h_2^2} = g_{ij}, \\ & (0 < i < m, 0 < j < n) \\ & \phi_{0j} = \alpha_1(y_j), \phi_{mj} = \phi_{(m-1)j} + h_1\alpha_2(y_j), \\ & (0 \leq j \leq n) \\ & \phi_{i0} = \beta_1(x_i), \phi_{in} = \phi_{i(n-1)} + h_2\beta_2(x_i), \\ & (0 \leq i \leq m) \end{aligned} \tag{2}$$

其中, $h_1 = l_1/m, h_2 = l_2/n$ 分别是 x 和 y 方向的步长. 记

$$\begin{aligned} f_{ij} &= g_{ij} = \frac{\alpha_1(y_j)}{h_1^2} \delta_{i1} + \frac{\beta_1(x_i)}{h_2^2} \delta_{jn} + \\ & \frac{2\alpha_2(y_i)}{h_1} \delta_{im} + \frac{\beta_2(x_i)}{h_2} \delta_{jn} \\ \varphi_i &= (\phi_{i1}\phi_{i2}\cdots\phi_{in})^T (i = 1, 2, \cdots, m) \\ F_i &= (f_{i1}f_{i2}\cdots f_{in})^T (i = 1, 2, \cdots, m) \end{aligned}$$

式中, δ_j 为 Kronecker- δ 符号.

利用上述记号, 式 (2) 可表达为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} & & & \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{A} & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ & & & & 2\mathbf{A} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_{m-1} \\ \Phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \dots \\ \mathbf{F}_{m-1} \\ \mathbf{F}_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中

^{*} 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19902022)
收稿日期: 2000-07-03; 作者简介: 富明慧 (1966—), 男, 副教授.
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

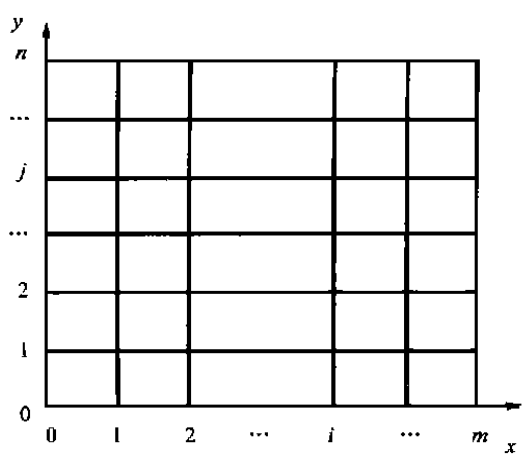


图 1 矩形区域及其网格划分
Fig. 1 Rectangle region and its grid

$$A = -\frac{1}{h_1^2} I_{n \times n}, \quad C = \frac{2}{h_1^2} I_{n \times n} + D,$$
$$D = \frac{1}{h_2^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中, I 是 n 阶单位矩阵, D 是 n 阶三对角矩阵.
代数方程 (3) 具有块三对角形式, 这对于建立高效算法是十分有利的.

2 矩阵 D 的特征值和特征矩阵

容易证明, 矩阵 D 的特征值及相应的特征向量分别为

$$\lambda_k = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{(2k-1)\eta}{4}$$
$$q_k = \sqrt{\frac{2h_2}{l_2}} (\sin(k-0.5)\eta, \sin(2k-1)\eta, \dots, \sin n(k-0.5)\eta)^T$$

其中, $k = 1, 2, \dots, n, \eta = \pi h_2 / l_2$.
由式 (4) 可知, 矩阵 C 的特征向量仍然是 q_k , 而特征值为

$$\lambda_{Ck} = \lambda_k + 2/h_1^2, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

不难验证, 特征向量 q_k 满足下面关系

$$q_k \circ q_j = \begin{cases} 1, & (k = j \neq n) \\ 2, & (k = j = n) \\ 0, & (k \neq j) \end{cases} \quad (5)$$

因此, n 个特征向量 q_k 是两两正交的. 记

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_k) = \sqrt{\frac{2h_2}{l_2}}.$$

$$\begin{pmatrix} \sin 0.5\eta & \sin 1.5\eta & \dots & \sin (n-0.5)\eta \\ \sin 1.0\eta & \sin 3.0\eta & \dots & \sin (n-0.5)2\eta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin 0.5n\eta & \sin 1.5n\eta & \dots & \sin (n-0.5)n\eta \end{pmatrix},$$
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{C1} & & & \\ & \lambda_{C2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{Cn} \end{pmatrix},$$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \\ & & & & 0.5 \end{pmatrix}$$

其中, Q 是特征向量组成的 n 阶矩阵, Λ 是由 C 的特征值组成的对角矩阵; P 也是对角矩阵, 其前 $n-1$ 个元素均为 1, 只最后一个元素是 0.5. 由特征矩阵的性质, 有

$$Q^{-1} C Q = \Lambda \quad (6)$$

由式 (5), 有

$$Q^{-1} = P Q^T \quad (7)$$

3 一种高效算法

由式 (6), 式 (3) 可化为

$$\begin{pmatrix} \Lambda & A & & \\ A & \Lambda & A & \\ & A & \Lambda & A \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & A & \Lambda & A \\ & & & & 2A & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_{m-1} \\ \Phi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{m-1} \\ F_m \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中,

$$\Phi_i = Q^{-1} \Phi_i, F_i = Q^{-1} F_i (i = 1, 2, \dots, m) \quad (9)$$

式 (8) 确定的代数方程可用块追赶法求解 (由于每个块元素均为对角矩阵, 矩阵运算实际上简化为数的运算, 因而具有很高的效率). 求出后 $\Phi_i, (i=1, 2, \dots, m)$ 再由式 (9) 的逆运算确定出 Φ_i :

$$\Phi_i = Q \Phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

下面分析求解代数方程 (3) 所需计算量 (仅考虑乘法运算). 式 (3) 左端矩阵的带宽是 $3n$, 如果用消元法, 计算量大约为 $O(mn^3)$; 如果将式 (3) 转化为 (8), 则求角式 (8) 的追赶法的计算量大约为 $O(mn)$, 而按式 (9)、(10) 通过矩阵乘法计

算 F_i 和 Φ_i 的计算量为 $O(mn^2)$, 因此整个计算过程的计算量仍是 $O(mn^2)$. 由此可见上述算法的效率较通常的消元法高得多. 然而, 这还不是最佳方案, 上述求解过程的效率还可进一步提高.

由三角关系

$$\sin(k-0.5)j\eta = \sin kj\eta \cos 0.5j\eta - \cos kj\eta \sin 0.5j\eta$$

可将特征矩阵 Q 分解为

$$Q = Q_C R_S + Q_S R_C \quad (11)$$

其中

$$Q_S = \sqrt{\frac{2h_2}{l_2}} \begin{bmatrix} \sin \eta & \sin 2\eta & \cdots & \sin n\eta \\ \sin 2\eta & \sin 4\eta & \cdots & \sin 2n\eta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin n\eta & \sin 2n\eta & \cdots & \sin n^2\eta \end{bmatrix},$$

$$R_S = \begin{bmatrix} \sin 0.5\eta & & & \\ & \sin 1.0\eta & & \\ \cdots & & \cdots & \\ & & & \sin 0.5n\eta \end{bmatrix},$$

$$Q_C = \sqrt{\frac{2h_2}{l_2}} \begin{bmatrix} \cos \eta & \cos 2\eta & \cdots & \cos n\eta \\ \cos 2\eta & \cos 4\eta & \cdots & \cos 2n\eta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos n\eta & \cos 2n\eta & \cdots & \cos n^2\eta \end{bmatrix},$$

$$R_C = - \begin{bmatrix} \cos 0.5\eta & & & \\ & \cos 1.0\eta & & \\ \cdots & & \cdots & \\ & & & \cos 0.5n\eta \end{bmatrix}$$

R_S , R_C 均是对角矩阵, 而 Q_S , Q_C 是对称矩阵. 这样式 (10) 可转化为

$$\Phi_i = Q_C(R_S\Phi_i) + Q_S(R_C\Phi_i) \quad (12)$$

对式 (11) 两端取转置, 得

$$Q^T = R_S Q_C + R_C Q_S \quad (13)$$

由式 (7)、(9) 与式 (13), 有

$$F_i = P Q^T F_i = P R_S Q_C F_i + P R_C Q_S F_i \quad (14)$$

对任一 n 维列向量 $T = (t_1 t_2 \cdots t_n)^T$, 乘积 $Q_C T$, $Q_S T$ 可以利用 FFT 算法来计算^[1,2]. 具体操作是: 先在该向量的第 1 个元素前填加一个零元素, 再在最后一个元素后续以 $(n-1)$ 个零元素, 构成一个 $2n$ 维的列向量:

$$S = (0 t_1 t_2 \cdots t_n 1 \cdots 0)^T$$

对 S 做 FFT 运算, 得 $2n$ 维的复向量, 其实部(虚部)的第 1 至第 n 个元素组成的向量即是 $S_C T (Q_S T)$.

这样, 式 (12) 和 (14) 均可利用 FFT 来实现. 由于 P , R_S , R_C 是对角矩阵, 它们对计算量的影响可以忽略, 因此, 式 (12) 和 (14) 所需计算量仅为 $O(mn \lg n)$.

下面, 归纳上述高效算法的计算过程:

- (1) 利用式 (14) 通过 FFT 计算 $F_i \Phi_i$, ($i = 1, 2, \cdots, m$);
- (2) 用追赶法求解式 (8), 求出 Φ_i , ($i = 1, 2, \cdots, m$);
- (3) 利用式 (12) 通过 FFT 计算出 Φ_i , ($i = 1, 2, \cdots, m$).

参考文献:

- [1] SAMARSKII A A, NIKOLAEV E S. Numerical methods for grid equations[J]. Berlin: Basel Boston, 1989. 1—502.
- [2] САМАРСКИЙ А А, ГУЛИН А В. Численные методы[М]. Изд—во Наука, 1989. 1—412.
- [3] ПОДЕДРЯ Б Е, ШЕШЕНИН С В, ХОЛМОТОВ Т. Задача в напряжениях[М]. Ташкент, изд—во ФАН, 1988. 1—197.
- [4] 李荣华, 冯果沈. 解微分方程的数值方法[М]. 北京: 人民教育出版社, 1980. 1—416.

An Efficient Algorithm for a Class of Boundary Value Problem

FU Ming hui¹, LIU Zuo qiu¹, LI Liu fen²

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China

2. Department of Earth Sciences, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Based on block marker for difference equations, the characteristic matrix of a Laplace transformation difference operator on the third Boundary Value problem of Poisson's equation is divided into a sine function matrix that can be applied for the fast fourier transform (FFT) and a cosine function matrix. Furthermore, combined with the FFT method and the method of chase, a highly efficient algorithm for Poisson's equation with the third Boundary Value is presented.

Keywords: Poisson's equation; the method of chase; the fast Fourier transform