

随机 Mathieu 系统的 Lyapunov 指数和稳定性*

刘晓莉¹, 戎海武¹, 张磊²

(1. 佛山科学技术学院, 广东 佛山 528000; 2. 中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘要: 研究了 Mathieu 系统在随机噪声激励下的主共振响应和稳定性问题. 用多尺度法分离了系统的快变项, 讨论了系统的阻尼项、随机项等对系统响应的影响. 求出了随机 Mathieu 系统的不变测度和最大 Lyapunov 指数, 由最大 Lyapunov 指数可得系统几乎必然稳定的充分必要条件.

关键词: 随机 Mathieu 振子; 主共振; 多尺度法; 最大 Lyapunov 指数; 几乎必然稳定性

中图分类号: O324 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 04-0032-03

1 选题背景

为了研究一个动力系统的稳定性, 考察由如下非线性方程描述的动力系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), f(0, \alpha) = 0 \quad (1)$$

式中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, α 是描述系统特征的参量. 由于随机因素的干扰, 假设系统的特征参量从 α 变为 $\alpha + \zeta(t)$, 这里 $\zeta(t)$ 是一个 m 维的零均值遍历随机过程, 这样描述系统运动的微分方程从 (1) 式变为

$$\dot{x} = f(x, \alpha, \zeta(t)), f(0, \alpha, \zeta(t)) = 0 \quad (2)$$

为了研究系统 (2) 零解的样本稳定性, 有必要研究其线性化系统

$$\dot{x} = D_x f(x, \alpha, \zeta(t))|_{x=0} x \quad (3)$$

零解的稳定性. 在一定的条件下, 系统 (2) 零解的稳定性可由其线性化系统 (3) 决定^[1]. 众所周知, 系统 (3) 零解的样本稳定性可由其最大 Lyapunov 指数 λ 决定, 即当 $\lambda > 0$ 时, 系统 (3) 零解几乎必然不稳定; 当 $\lambda < 0$ 时几乎必然稳定. 为了计算 λ , 除了 Monte-Carlo 模拟方法, 最常用的方法是利用系统的不变测度进行计算. 当 $\zeta(t)$ 为实噪声或宽带噪声时, 已有许多研究工作^[2,3], 而 $\zeta(t)$ 当为窄带噪声时, 研究工作较少^[4,5]. 本文对一典型的二阶系统在随机参数激励下, 用多尺度法研究了系统不变测度和最大 Lyapunov 指数, 由最大 Lyapunov 指数给出了系统稳定的充分必要条件.

2 多尺度法

考虑如下受随机参激的二阶系统

$$\ddot{u} + \epsilon \beta \dot{u} + \omega_0^2 u + \epsilon u \zeta(t) = 0 \quad (4)$$

式中 $\epsilon \ll 1$ 为小参数, β, ω_0 分别为系统的阻尼系数和自然频率, $\zeta(t)$ 是随机噪声项,

$$\zeta(t) = h \cos(\Omega t + \gamma W(t))$$

式中, $W(t)$ 为标准 Wiener 过程. 由 Wedig^[4] 可知当取不同值时, $\zeta(t)$ 可代表宽带和窄带两种不同类型的噪声. 当 $\gamma = 0$ 时, 系统 (4) 就是著名的 Mathieu 方程. 当 $\gamma \neq 0$ 时, 不妨称为随机 Mathieu 系统. 本文用多尺度法研究, 多尺度法近些年来在随机系统中也有一些应用^[5-7]. 设系统 (4) 具有如下形式的解

$$u(t, \epsilon) = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) + \dots$$

式中 $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$ 分别是快、慢时间尺度. 本文只对首次近似解 $u_0(T_0, T_1)$ 进行讨论. 记

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + cc$$

式中, cc 表示前述各项的共轭, $A(T_1)$ 是随时间缓变的系统响应的振幅. 经过推导可得

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2i\omega_0 A' \exp(i\omega_0 T_0) - i\omega_0 \beta A \exp(i\omega_0 T_0) +$$

$$\frac{h}{2} \bar{A} \exp[i(\Omega - \omega_0) T_0 + \gamma W(T_1)] + cc \quad (5)$$

式中, A' , $\bar{A}$ 分别表示 A 关于 T_1 的导数及共轭. 本文下面将讨论系统 (4) 的主共振响应. 设 $\Omega \approx 2\omega_0$, 引入调谐参数 σ , $\Omega = 2\omega_0 + \epsilon\sigma$, 令 (5) 式右端中的奇异项为零可得

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10072049, 19972054); 广东省自然科学基金资助项目 (000017)

收稿日期: 2000-01-05; 作者简介: 刘晓莉 (1961-), 女, 讲师.

$$2i\omega_0 A' + i\beta\omega_0 A - \frac{h}{2} \bar{A} \exp(i\sigma T_1 + i\gamma W(T_1)) = 0 \quad (6)$$

将 A 表示成极坐标的形式

$$A(T_1) = a(T_1) \exp[i\varphi(T_1)]$$

代入 (6) 式并分离实部和虚部可得

$$\begin{cases} a' = -\frac{\beta}{2}a - \frac{h}{4\omega_0}a \sin \eta \\ a\eta' = \sigma a - \frac{h}{2\omega_0}a \cos \eta - \gamma a W'(T_1) \end{cases} \quad (7)$$

式中, $\eta = \sigma T_1 - 2\varphi + \gamma W(T_1)$

3 最大 Lyapunov 指数

显然零解 $a = 0$ 是方程 (7) 的稳态解, 下面讨论它的稳定性. 令 $v = \ln a$, 方程 (7) 可改写为如下 Ito 方程的形式

$$\begin{cases} dv = \left(-\frac{\beta}{2} - \frac{h}{4\omega_0} \sin \eta\right) dT_1 \\ d\eta = \left(\sigma - \frac{h}{2\omega_0} \cos \eta\right) dT_1 - \gamma dW \end{cases} \quad (8)$$

由方程 (8) 可知扩散系数非正则, 故随机过程 $\eta(T_1)$ 是单位圆上遍历的马尔可夫过程, $\eta(T_1)$ 的不变测度即稳态概率密度函数 $p(\eta)$ 对应的 FPK 方程为

$$\frac{d^2 p}{d\eta^2} - \frac{d}{d\eta} [(\bar{\sigma} - \bar{h} \cos \eta)p] = 0 \quad (9)$$

式中, $\bar{\sigma} = 2\sigma/\gamma^2$, $\bar{h} = h/\omega_0\gamma^2$. 由于 $p(\eta)$ 满足周期性条件 $p(\eta) = p(\eta + 2\pi)$ 和归一性条件 $\int_0^{2\pi} p(\eta) d\eta = 1$, 由方程 (9) 可解得

$$p(\eta) = \frac{\exp\left[\bar{\sigma}\left(\eta + \frac{3}{2}\pi\right) - \bar{h} \sin \eta\right]}{4\pi^2 I_0(\bar{h} I_{-i\bar{\sigma}}(\bar{h}))} \int_{\eta}^{\eta+2\pi} \exp\left[-\bar{\sigma}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \bar{h} \sin x\right] dx$$

式中, $I_n(x)$ 是第一类贝塞尔 I 函数, n 是实数或复数. 根据 Oseledec^[8] 乘法遍历性定理, 对于任何非零初始值 (a_0, η_0) , 方程 (8) 解 $a(T_1; a_0, \eta_0)$ 的 Lyapunov 指数为

$$\lambda(a_0, \eta_0) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \ln |a(T_1; a_0, \eta_0)|, \text{ w.p. } 1$$

式中, w.p.1 表示以概率 1 成立. 且 $\lambda(a_0, \eta_0)$ 只能取如下确定的值 $\lambda_{\min} = \lambda_2 < \lambda_1 = \lambda_{\max}$. 则方程 (8) 零解的稳定性可由最大 Lyapunov 指数 $\lambda = \lambda_{\max}$ 确定, 即当 $\lambda < 0$ 时零解几乎必然稳定, $\lambda > 0$ 时零解几乎必然不稳定. 由 (8) 式可得

$$\lambda = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \ln \left| \frac{a(T_1)}{a(0)} \right| =$$

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} (v(T_1) - v(0)) =$$

$$-\frac{\beta}{2} - \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \frac{h}{4\omega_0} \sin \eta(\tau) d\tau =$$

$$-\frac{\beta}{2} - \frac{h}{4\omega_0} E[\sin \eta] =$$

$$-\frac{\beta}{2} - \frac{h}{4\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \eta p(\eta) d\eta$$

经过较复杂的计算, 可得最大 Lyapunov 指数 λ 为

$$\lambda = -\frac{\beta}{2} -$$

$$\frac{h}{8\omega_0} \left\{ \frac{I_{1-\frac{2\sigma}{\gamma^2}}\left(-\frac{h}{\omega_0\gamma^2}\right)}{I_{-\frac{2\sigma}{\gamma^2}}\left(-\frac{h}{\omega_0\gamma^2}\right)} + \frac{I_{1+\frac{2\sigma}{\gamma^2}}\left(-\frac{h}{\omega_0\gamma^2}\right)}{I_{\frac{2\sigma}{\gamma^2}}\left(-\frac{h}{\omega_0\gamma^2}\right)} \right\} \quad (10)$$

取 $\beta = 0.0$, $\omega_0 = \gamma = 1.0$, λ 关于 σ, h 变化的曲面见图 1, 对应的 λ 等值线图见图 2.

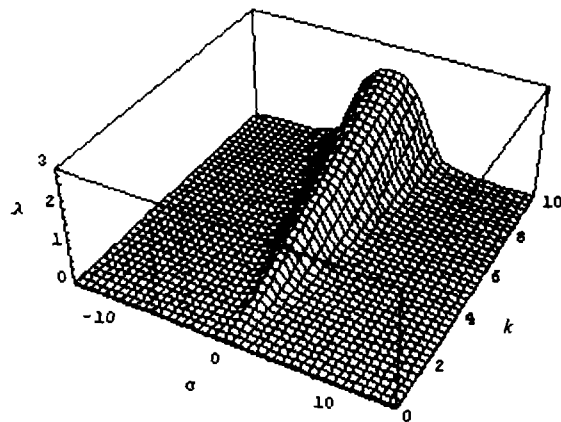


图1 Lyapunov 指数曲面图

Fig.1 Surface of Lyapunov exponent

由图 1 可见此曲面有一个主峰, 当随机激励的中心频率 Ω 接近系统的固有频率 ω_0 的 2 倍即 σ 接近于零时, Lyapunov 指数 λ 单调增加, 当 $\sigma = 0$ 时达到最大值即在主峰的中心区域. 而在这个主峰区外则是平面 $\lambda = 0$, 即 λ 与 σ, h 无关, 此时随机参数激励不起作用.

对 (10) 式经计算表明, λ 是 h 的增函数, 即随着随机激励振幅的增大零解将失去稳定; λ 是 $|\sigma|$ 的减函数, 当 $\sigma = 0$ 时 λ 达到最大, 即当随机激励的中心频率接近系统固有频率的 2 倍时, 系统变得不稳定; λ 是 γ 的减函数, 即当随机激励的

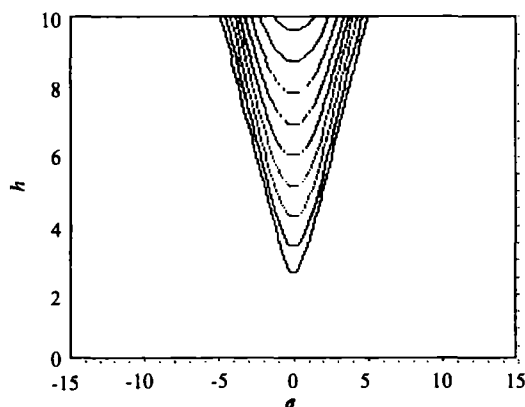


图 2 Lyapunov 指数等值线图

Fig.2 Contours of Lyapunov exponent

带宽变窄时系统变得不稳定. 由于 $\lambda = 0$ 时系统零解的稳定性分叉点, 分别取 h, σ, γ, β 为分叉参数, 结合(10)式可求出对应的分叉点. 如取 β 为分叉参数, 则由(10)式可

$$\beta = \beta_0 = -\frac{h}{4\omega_0} \left\{ \frac{I_{1-\frac{2q}{\gamma^2}i} \left(-\frac{h}{\omega_0 \gamma^2} \right)}{I_{-\frac{2q}{\gamma^2}i} \left(-\frac{h}{\omega_0 \gamma^2} \right)} + \frac{I_{1+\frac{2q}{\gamma^2}i} \left(-\frac{h}{\omega_0 \gamma^2} \right)}{I_{\frac{2q}{\gamma^2}i} \left(-\frac{h}{\omega_0 \gamma^2} \right)} \right\}$$

是(7)式零解的稳定性分叉点, 即当 $\beta > \beta_0$ 时零解稳定, 而当 $\beta < \beta_0$ 时零解不稳定.

参考文献:

- [1] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992, 415-416.
- [2] ARIARATNAM S T, XIE W C. Lyapunov exponents and stochastic stability of coupled linear systems under real and noise excitation[J]. ASME J Applied Mechanics, 1992, 59:664-673.
- [3] ARIARATNAM S T, XIE W C. Lyapunov exponents and stochastic stability of two-dimensional parametrically excited random systems[J]. ASME J Applied Mechanics, 1993, 60:677-682.
- [4] WEDIG W V. Invariant measures and Lyapunov exponents for generalized parameter fluctuations[J]. Structural Safety, 1990, 8: 13-25.
- [5] RONG H W, XU W, FANG T. Principal response of Duffing oscillator to combined deterministic and narrow-band random parametric excitation[J]. J Sound and Vibration, 1998, 210(4): 483-515.
- [6] RAJAN S, DAVIES H G. Multiple time scaling of the response of a Duffing oscillator to narrow-band excitations[J]. J Sound and Vibration, 1988, 123: 497-506.
- [7] NAYFEH A H, SERHAN S J. Response statistics of nonlinear systems to combined deterministic and random excitations[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1990, 25(5): 493-509.
- [8] OSELEDEC V I. A multiplicative ergodic theorem Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems[J]. Transaction of the Moscow Mathematical Society, 1968, 19: 197-231.

Maximum Lyapunov Exponent and Almost-Sure Stability for Stochastic Mathieu Systems

LIU Xiao-li¹, RONG Hai-wu¹, ZHANG Lei²

(1. Foshan University, Foshan 528000, Guangdong, China;

2. Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The principal resonance of a stochastic Mathieu oscillator to random parametric excitations is investigated. The method of multiple scales is used to determine the equations of modulation of amplitude and phase. The effects of damping, detuning, bandwidth, and magnitudes of random excitation are analyzed. The explicit asymptotic formulas for the maximum Lyapunov exponent is obtained. The almost-sure stability or instability of the stochastic Mathieu system depends on the sign of the maximum Lyapunov exponent.

Keywords: stochastic Mathieu system; principal resonance; multiple scale method; maximum Lyapunov exponent; almost-sure stability