

关于提升系数的确定与滤波的构造*

周先波¹, 陈文胜²

(1. 中山大学岭南学院, 广东 广州 510275; 2. 深圳大学理学院, 广东 深圳 518060)

摘 要: 研究双正交滤波与其多相矩阵之间的关系, 证明滤波多相矩阵的三角分解对应于滤波的提升和对偶提升的定理, 并用之构造双正交滤波和正交滤波.

关键词: 提升格式; 提升系数; 多相矩阵; 多步提升

中图分类号: O174.2; O177.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 04-0035-03

近年来, 提升格式被广泛应用于小波构造上^[1,2], 而滤波的多相矩阵在信号分析中起着重要的作用, 多相矩阵的乘积可表示信号的精确重构过程^[3]. 本文研究多相矩阵的三角分解与双正交滤波的多步提升之间的关系, 证明多相矩阵的上三角分解和下三角分解分别对应于滤波的提升和对偶提升, 且提升和对偶提升的系数分别为上、下三角分解中上、下三角处元素的负值和复共轭; 给出寻求由 Lazy 滤波经多步提升得到双正交滤波提升系数的一个方法, 并且用多步提升构造正交滤波, 得到正交滤波构造的另一个方法.

1 多相矩阵与提升系数的确定

为使用多相矩阵时的方便, 本文定义

$$m_0(\omega) = 2^{-1/2} \sum_k h_k e^{-ik\omega} = 2^{-1/2} h(\omega),$$

$$m_1(\omega) = 2^{-1/2} \sum_k g_k e^{-ik\omega} = 2^{-1/2} g(\omega),$$

$$\tilde{m}_0(\omega) = 2^{-1/2} \sum_k \tilde{h}_k e^{-ik\omega} = 2^{-1/2} \tilde{h}(\omega),$$

$$\tilde{m}_1(\omega) = 2^{-1/2} \sum_k \tilde{g}_k e^{-ik\omega} = 2^{-1/2} \tilde{g}(\omega)$$

则滤波集 $\{m_0, \tilde{m}_0, m_1, \tilde{m}_1\}$ 的双正交条件: $\overline{m_0(\omega)} \tilde{m}_0(\omega) + \overline{m_0(\omega + \pi)} \tilde{m}_0(\omega + \pi) = 1$ 可表示为

$$\overline{h(\omega)} \tilde{h}(\omega) + \overline{h(\omega + \pi)} \tilde{h}(\omega + \pi) = 2 \quad (1)$$

定义 1 称矩阵

$P(\omega) := \begin{pmatrix} h_e(\omega) & g_e(\omega) \\ h_o(\omega) & g_o(\omega) \end{pmatrix}$ 为双正交滤波对 $\{h, g\}$ 的多相矩阵^[3], 其中, $h_e(\omega) := 1/2[h(\omega/2) + h(\omega/2 + \pi)]$, $h_o(\omega) := 1/2e^{i\omega/2}[h(\omega/2) -$

$h(\omega/2 + \pi)]$, g_e, g_o 也具一样的形式. 同样可定义多相矩阵 $\tilde{P}(\omega)$.

注意到

$$P(\omega) = \sqrt{2}/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\omega/2} & -e^{i\omega/2} \end{pmatrix} M^T(\omega/2)$$

其中, $M = \begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega + \pi) \end{pmatrix}$ 为调幅矩阵,

可以证明, 双正交条件 (1) 等价于

$$\overline{P^T(\omega)} \tilde{P}(\omega) = I \quad (2)$$

这是信号精确重构的条件^[3]. 下面考察提升格式与多相矩阵的三角分解之间的关系.

定理 1 设两组双正交滤波集 $\{h^0, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}^0\}$ 和 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ (按 (1) 式的意义) 的多相矩阵分别为 $P^0(\omega)$ 和 $P(\omega)$, 如果

$$P(\omega) = P^0(\omega) \begin{pmatrix} 1 & a(\omega) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中, $a(\omega)$ 为 2π -周期函数, 则后者是由前者提升而得, 且提升系数 $s(\omega) = -a(\omega)$.

证明 由多相矩阵的定义, (3) 式可以写为

$$\begin{pmatrix} h_e(\omega) & g_e(\omega) \\ h_o(\omega) & g_o(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_e^0(\omega) & g_e^0(\omega) \\ h_o^0(\omega) & g_o^0(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a(\omega) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} h_e(\omega) = h_e^0(\omega), h_o(\omega) = h_o^0(\omega) \\ g_e(\omega) = a(\omega) h_e^0(\omega) + g_e^0(\omega) \\ g_o(\omega) = a(\omega) h_o^0(\omega) + g_o^0(\omega) \end{cases}$$

利用 $h(\omega) = h_e(2\omega) + e^{-i\omega} h_o(2\omega)$ 和 $g(\omega) = g_e(2\omega) + e^{-i\omega} g_o(2\omega)$, 可得到 $h(\omega) = h_e^0(2\omega) +$

* 收稿日期: 2000-10-13; 作者简介: 周先波 (1965-), 男, 讲师.

$e^{-i\omega}h_o^0(2\omega) = h^0(\omega)$ 及

$$\begin{aligned} g(\omega) &= g_e^0(2\omega) + a(2\omega)h_e^0(2\omega) + \\ e^{-i\omega}(g_o^0(2\omega) + a(2\omega)h_o^0(2\omega)) &= \\ g^0(\omega) + a(2\omega)h^0(\omega) \end{aligned}$$

利用 $\tilde{h}(\omega) = -e^{-i\omega} \overline{g(\omega + \pi)}$, $\tilde{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{h(\omega + \pi)}$ 及 $a(\omega)$ 的 2π 周期性, 得

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\omega) &= -e^{-i\omega} \overline{g^0(\omega + \pi)} - \\ e^{-i\omega} \overline{a(2\omega)h^0(\omega + \pi)} &= \\ \tilde{h}^0(\omega) - \overline{a(2\omega)}\tilde{g}^0(\omega), \end{aligned}$$

$$\tilde{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{h^0(\omega + \pi)} = \tilde{g}^0(\omega)$$

从而, 有

$$\begin{cases} h(\omega) = h^0(\omega), \tilde{g}(\omega) = \tilde{g}^0(\omega) \\ \tilde{h}(\omega) = \tilde{h}^0(\omega) - \overline{a(2\omega)}\tilde{g}^0(\omega) \\ g(\omega) = g^0(\omega) + a(2\omega)h^0(\omega) \end{cases}$$

由此与提升公式^[1]进行比较, 知 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 是由 $\{h^0, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}^0\}$ 提升而得, 且 $s(\omega) = -a(\omega)$.

定理 2 如果 2 组双正交滤波集 $\{h^0, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}^0\}$ 与 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 的多相矩阵 $P^0(\omega)$ 与 $P(\omega)$ 满足

$$P(\omega) = P^0(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(\omega) & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中 $b(\omega)$ 为 2π -周期函数, 则后者是由前者对偶提升而得, 且对偶提升系数 $\tilde{s}(\omega) = \overline{b(\omega)}$.

证明 由 (4) 式及多相矩阵的定义, 得

$$\begin{cases} h_e(\omega) = h_e^0(\omega) + b(\omega)g_e^0(\omega) \\ h_o(\omega) = h_o^0(\omega) + b(\omega)g_o^0(\omega) \\ g_e(\omega) = g_e^0(\omega), g_o(\omega) = g_o^0(\omega) \end{cases}$$

同定理 1 的证明, 有

$$\begin{cases} \tilde{h}(\omega) = \tilde{h}^0(\omega), g(\omega) = g^0(\omega) \\ h(\omega) = h^0(\omega) + g^0(\omega)b(2\omega) \\ \tilde{g}(\omega) = \tilde{g}^0(\omega) - \tilde{h}^0(\omega)\overline{b(2\omega)} \end{cases}$$

与对偶提升公式^[1]进行比较, 知 $\tilde{s}(\omega) = \overline{b(\omega)}$.

注 由定理 1 和定理 2, 要得到已知的双正交滤波的提升步骤, 先要确定被提升的初始滤波集对应的多相矩阵 $P^0(\omega)$, 再确定提升系数 $s(\omega)$. 如 $P^0(\omega)$ 已求出, 解矩阵方程 (3) 或 (4), 即可得到 $s(\omega)$ 或 $\tilde{s}(\omega)$. 故主要问题是确定 $P^0(\omega)$. 这可由多相矩阵的三角分解方法求得. 下简述这种方法:

记 $z := e^{i\omega}$, $h(z) := \sum_k h_k z^{-k}$, $g(z) := \sum_k g_k z^{-k}$, $h_e(z) := \sum_k h_{2k} z^{-k}$, $h_o(z) := \sum_k h_{2k+1} z^{-k}$, 其它的可同样定义, 则有下列一些

——对应关系:

$$\begin{aligned} z &\leftrightarrow e^{i\omega}; -z \leftrightarrow e^{i(\omega+\pi)}; z^{-1} \leftrightarrow e^{-i\omega}; \\ h(z) &\leftrightarrow h(\omega); h(-z) \leftrightarrow h(\omega + \pi); \\ h(z^{-1}) &\leftrightarrow \overline{h(\omega)}. \end{aligned}$$

$h(z), h_e(z), h_o(z), P(z^2)$ 等均为关于 z 的 Laurent 多项式. 由 (2) 式知

$$\det P(z) = \begin{vmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{vmatrix} = 1 \quad (5)$$

故可取 $\gcd(h_e, h_o) = 1$. 由 Laurent 多项式的带余除法, 存在多项式 $q_i(z)$, 使

$$\begin{pmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中, n 为一偶数. 由 (5), 存在滤波 $g^0(z)$, 使

$$\begin{aligned} P^0(z) &= \begin{pmatrix} h_e & g_e^0 \\ h_o & g_o^0 \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ \prod_{i=1}^{n/2} \begin{pmatrix} 1 & q_{2i-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2i}(z) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由定理 1 和定理 2, $P^0(z)$ 对应的双正交滤波是由 Lazy 滤波^[1]: $h(\omega) = \tilde{h}(\omega) = 1, g(\omega) = \tilde{g}(\omega) = e^{-i\omega}$ 依次交替地经 $n/2$ 次的提升和 $n/2$ 次的对偶提升而得, 且提升和对偶提升的系数分别为

$$\{s_1, \tilde{s}_2, \dots, s_{n-1}, \tilde{s}_n\} = \{-q_1, \overline{q_2}, \dots, -q_{n-1}, \overline{q_n}\}$$

2 提升构造正交和双正交滤波

由上节可知, 当把正交小波看作双正交小波的特例时, 就可以将正交小波对应的正交滤波的多相矩阵进行多步三角分解, 由 Lazy 滤波的若干步提升和对偶提升得到正交滤波, 可见, 提升格式提供了一个构造正交小波的更直接的程序化方法. 本节举 2 个例子, 分别说明提升在正交滤波和双正交滤波构造中的应用.

Haar 小波的提升构造: Haar 小波对应的滤波为

$$h(\omega) = \tilde{h}(\omega) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 e^{-i\omega},$$

$$g(\omega) = \tilde{g}(\omega) = -\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 e^{-i\omega}$$

由本文定义知, $h_e(z) = h_o(z) = \sqrt{2}/2, g_e(z) = -\sqrt{2}/2, g_o(z) = \sqrt{2}/2$, 因

$$\begin{pmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

故取

$$P^0(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

解矩阵方程

$$P(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = P^0(z) \begin{pmatrix} 1 & a(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得 $a(z) = 1 - \sqrt{2}$. 由定理1和2知, Haar 滤波是由 Lazy 滤波经2步提升和1步对偶提升而得,提升和对偶提升的系数依次为

$$s_1(\omega) = \sqrt{2} - 1, \bar{s}_2(\omega) = \sqrt{2}/2, s_3(\omega) = \sqrt{2} - 1$$

双正交滤波的提升构造: Cohen-Daubechies-Feauveau 双正交滤波的对偶低通滤波具有形式^[4]:

$$\tilde{m}^{N,L}(\omega) = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^{2L-N-1} \cdot P_L \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right) \cdot e^{-iL\omega}$$

其中, $P_L(\gamma) = \sum_{j=0}^{L-1} \binom{L-1+j}{j} \gamma^j$. 当 $N=1, L=1$ 时, $\tilde{m}^{1,1}(\omega) = e^{-i\omega}$, 利用双正交条件可得其对应的双正交滤波集为

$$\begin{aligned} \{m_0^1(\omega), m_1^1(\omega), \bar{m}_0^1(\omega), \bar{m}_1^1(\omega)\} = \\ \{1/4 + 1/2e^{-i\omega} + 1/4e^{-2i\omega}, -1, e^{-i\omega}, \\ 1/4e^{i\omega} - 1/2 + 1/4e^{-i\omega}\} \end{aligned} \quad (6)$$

现将这转换成(1)式的双正交意义, 即 $h(z) = \sqrt{2}/4 + \sqrt{2}/2z^{-1} + \sqrt{2}/4z^{-2}$, $g(z) = -\sqrt{2}$, 通过运算, 知 $h_e = \sqrt{2}/4 + \sqrt{2}/4z^{-1}$, $h_o = \sqrt{2}/2$, $g_e = -\sqrt{2}$,

$g_o = 0$, 故 $P(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 + \sqrt{2}/4z^{-1} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$. 因

$$\begin{pmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - \sqrt{2} + z^{-1}/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

故

$$P^0(z) = \begin{pmatrix} 1/2 - \sqrt{2} + z^{-1}/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 - \sqrt{2} + z^{-1}/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $P(z) = P^0(z) \begin{pmatrix} 1 & a(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 通过计算得 $a(z) = -\sqrt{2}$. 故由定理1和2, 滤波集(6)是由 Lazy 滤波经2次提升和1次对偶提升而得, 且提升和对偶提升系数依次为 $s_1(\omega) = -1/2 + \sqrt{2} - 1/2e^{i\omega}$, $\bar{s}_2(\omega) = \sqrt{2}/2$, $s_3(\omega) = \sqrt{2}$.

另外, 可以证明当提升和对偶提升的系数依次为 $s_1 = -1/2 + \sqrt{2} - 1/2e^{i\omega}$, $\bar{s}_2 = \sqrt{2}/2$, $s_3 = \sqrt{2}$, $s_4 = -1/2(1 + e^{i\omega})$ 时, Lazy 滤波可被提升为可生成双正交小波 Riesz 基的双正交滤波(证明方法同文献[5])

参考文献:

- [1] SWELDENS W. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets[J]. Appl Comp Harm Anal, 1996,3:186-200.
- [2] SWELDENS W, SCHRÖDER P. Building your own wavelets at home[J]. ACM Siggraph Course notes: Wavelets in Computer Graphics, 1996:15-87.
- [3] STRANG G. Wavelets from filter banks[A]. In: AINSWORTH M, LEVESLEY J, LIGHT W A, et al, eds. Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs[M]. London: Oxford University Press, 1997.
- [4] DAUBECHIES I. Ten Lectures on Wavelet// CBMS-NSF Regional Conf Series in Appl Math[C]. Philadelphia: SIAM, 1992.
- [5] 周先波. 提升格式和双正交小波 Riesz 基[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1998,37(4):38-42.

On the Determination of Lifting Coefficients and the Construction of Filters

ZHOU Xian-bo¹, CHEN Wen-sheng²

(1. Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China;

2. Shenzhen University, Shenzhen 518060, Guangdong, China)

Abstract: The relation between the lifting coefficients and the polyphase matrix for the biorthogonal filters is studied. A theorem that the triangular decomposition for filters corresponding to the lifting and dual-lifting of them is proved, and by which orthogonal and biorthogonal filters are constructed respectively.

Keywords: lifting scheme; lifting coefficients; polyphase matrix; multi-step lifting