

有界半特征的同胚定理及其应用*

何远江

(中山大学统计科学系, 广东 广州 510275)

摘要: 设 $(S, +, e)$ 为一可交换半群, 有单位元 e . 称函数 $\rho: S \rightarrow [-1, 1]$ 为有界半特征, 若 $\rho(e) = 1$ 且 $\rho(s+t) = \rho(s)\rho(t), s, t \in S$. 设 H 为一些有界半特征所成的集合, $M(H)$ 为 H 上的全体有限 Radon 测度, 则有下面的同胚定理: $\mu \rightarrow L_\mu: \int_H \rho(s) \mu(d\rho), s \in S$ 是 $M(H)$ 到 $\mathbb{R}^S$ 的某个子集的同胚映射. 应用同胚定理, 给出了局部紧空间上的随机测度的相应的经典命题的较简单新证明, 且无需第二可数性条件.

关键词: 半群; Radon 测度; 正定函数; Laplace 泛函; 随机测度

中图分类号: O177.6; O174.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 05-0009-04

调和分析理论是概率论研究的有效工具. 从文 [1] 可知, 半群 S 上的全体有界半特征 $\hat{S}$ 上的全体有限 Radon 测度同胚于 S 上的全体有界正定函数, 而同胚映射就是 Laplace 变换. 本文推广了文 [1] 的结果, 证明了同胚定理: $\hat{S}$ 上的任意的一个子集 H 上的全体 Radon 测度通过 Laplace 变换同胚于 S 上的全体有界正定函数的一个子集. 应用同胚定理, 本文推广了局部紧第二可数空间上的随机测度的相应的经典命题 (无需第二可数性条件及给出了利用同胚定理的新的较简单的证明).

1 同胚定理

以下以 $\mathcal{B}(X)$ 或 $\mathcal{B}$ 记拓扑空间 X 的 Borel 域, 即由 X 的开集生成的 σ -代数.

定义 1 (参看文 [1], 2.2.1) 设 X 为一 Hausdorff 空间, μ 为定义在 $\mathcal{B}(X)$ 上的测度. 称 μ 为在 X 上的 Radon 测度, 若下列条件满足:

- 1) 对 X 的每一个紧子集 C 都有 $\mu(C) < \infty$;
- 2) 对每一 $B \in \mathcal{B}$ 都有

$$\mu(B) = \sup\{\mu(C): C \subset B, C \text{ 是紧集}\}.$$

以下恒设 $(S, +, e)$ 为一可交换半群, 有单位元 e .

定义 2 (参看文 [1], 4.1.1, 4.1.2, 4.2.1, 4.2.2 及 p 96) 称函数

$$\rho: S \rightarrow [-1, 1]$$

为半群 S 的有界半特征, 若下列条件满足:

- 1) $\rho(e) = 1$;
- 2) $\rho(s+t) = \rho(s)\rho(t), s, t \in S$.

设 $\hat{S}$ 为 S 的全体有界半特征, 赋予 $\hat{S}$ 从 $[-1, 1]^S$ 上遗传下来的逐点 (pointwise) 收敛拓扑.

定义 3 (参看文 [1], 4.1.5) 称 S 上的复值函数 φ 是正定的, 若对任意正整数 n , 任意复数 $c_1, \dots, c_n$ 和任意 $s_1, \dots, s_n \in S$ 都有

$$\sum_{j,k=1}^n c_j \bar{c}_k \varphi(s_j + s_k) \geq 0$$

注 1 这里的正定函数 φ 实际上是实值的: 设 $n=1, c_1=1$, 分别设 $s_1=s$ 和 $s_1=e$, 则分别有 $\varphi(s+s) \geq 0$ 和 $\varphi(e) \geq 0$. 设 $n=2, c_1=c_2=1, s_1=s, s_2=e$, 则有 $2\varphi(s) + \varphi(s+s) + \varphi(e) \geq 0$. 故 $\varphi(s)$ 是实值的.

引理 1 (参看文 [1], 4.2.8) S 上的每个有界正定函数 φ 都有积分表示

$$\phi(s) = \int_S \rho(s) d\mu(\rho), s \in S$$

其中, μ 是 $\hat{S}$ 上的有限 Radon 测度并且是惟一确定的.

由于对于 $\hat{S}$ 上的每一有限 Radon 测度 μ , 函数 $\varphi(s) = \int_S \rho(s) \mu(d\rho), s \in S$ 是有界正定的, 从引理 1 有下面的推论.

推论 1 设 μ, ν 为 $\hat{S}$ 上的有限 Radon 测度, 则 $\mu = \nu$ 当且仅当

$$\int_S \rho(s) \mu(d\rho) = \int_S \rho(s) \nu(d\rho), s \in S$$

* 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (980287)

收稿日期: 2001-02-08; 作者简介: 何远江 (1945-), 男, 教授.

设 $M(\hat{S})$ 为 $\hat{S}$ 上的全体有限 Radon 测度, H 为 $\hat{S}$ 的一个子集且带有相对拓扑, $M(H)$ 为 H 上的全体有限 Radon 测度. 本文赋予 $M(H)$ 弱拓扑, 即使得对 H 上每一有界连续函数 f , 映射

$$M(H) \rightarrow (-\infty, +\infty), \mu \rightarrow \int_H \rho(f) \mu(d\rho)$$

都是连续的最粗拓扑(关于弱拓扑, 例如, 可参看文[1], 第2章的第3节). 称 $M(H)$ 中的网 (μ_n) 弱收敛于 $\mu \in M(H)$, 记为 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, 若 (μ_n) 关于弱拓扑收敛于 μ . 根据文[2], 第4章的定理7, $[-1, 1]^S$, $\hat{S}$ 和 H 都是全正则空间, 根据文[1]定理2.3.1, 在上面赋予 $M(H)$ 的弱拓扑与文[1]定义的弱拓扑相同.

测度 $\lambda \in M(H)$ 的 Laplace 泛函定义为

$$L_\lambda(s) = \int_H \rho(s) \lambda(d\rho), s \in S$$

设测度 $\lambda \in M(H)$, $\mathcal{A}(\hat{S})$ 上的函数 $\hat{\lambda}$ 定义为 $\hat{\lambda}(A) = \lambda(AH)$, $A \in \mathcal{A}(\hat{S})$.

引理2 设 $H \subset \hat{S}$, $\lambda, \mu, \nu \in M(H)$, (μ_n) 是 $M(H)$ 中的网. 则

- 1) $\hat{\lambda} \in M(\hat{S})$;
- 2) $L_{\hat{\lambda}}(s) = L_\lambda(s), s \in S$;
- 3) $\mu = \nu$ 当且仅当 $\hat{\mu} = \hat{\nu}$;
- 4) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ 当且仅当 $\hat{\mu}_n \xrightarrow{w} \hat{\mu}$.

证明 1) 显然 $\hat{\lambda}$ 是 $\mathcal{A}(\hat{S})$ 上的有限测度. 现在证明 $\hat{\lambda}$ 是 Radon 测度.

设 $B \in \mathcal{A}(\hat{S})$, 则 $\hat{\lambda}(B) = \lambda(BH) = \sup\{\lambda(C) : C \text{ 是紧集}, C \subset BH\} = \sup\{\hat{\lambda}(CH) : C \text{ 是紧集}, C \subset BH\} = \sup\{\hat{\lambda}(C) : C \text{ 是紧集}, C \subset BH\} \leq \sup\{\hat{\lambda}(C) : C \text{ 是紧集}, C \subset B\}$.

故 $\hat{\lambda}$ 是 Radon 测度.

2) 对固定的 $s \in S$, 设 $A_k = \{\rho \in \hat{S} : \frac{k}{n} \leq \rho(s) < \frac{k+1}{n}\}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$. 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} & \left| \int_H \rho(s) \lambda(d\rho) - \int_S \rho(s) \hat{\lambda}(d\rho) \right| \leq \\ & \sum_{k=-n}^n \left| \int_{HA_k} \rho(s) \lambda(d\rho) - \int_{A_k} \rho(s) \hat{\lambda}(d\rho) \right| \leq \\ & \sum_{k=-n}^n \frac{1}{n} \lambda(HA_k) = \frac{1}{n} \lambda(H) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

故对每一 $s \in S$, 有

$$\int_H \rho(s) \lambda(d\rho) = \int_S \rho(s) \hat{\lambda}(d\rho)$$

3) 显然从 $\mu = \nu$ 可得 $\hat{\mu} = \hat{\nu}$.

设 $\hat{\mu} = \hat{\nu}$. 设 C 为 H 的紧子集, 则 C 也是 $\hat{S}$ 的紧子集, 故 $C \in \mathcal{A}(\hat{S})$. 因 $\mu(C) = \mu(CH) = \hat{\mu}(C) = \hat{\nu}(C) = \nu(CH) = \nu(C)$, 所以 $\mu = \nu$.

4) 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ 且 $\hat{G}$ 是 $\hat{S}$ 的开集, 则 $G = H\hat{G}$ 是 H 的开集. 因

$$\liminf_n \hat{\mu}_n(\hat{G}) = \liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G) = \hat{\mu}(\hat{G})$$

故 $\hat{\mu}_n \xrightarrow{w} \hat{\mu}$.

反之, 若 $\hat{\mu}_n \xrightarrow{w} \hat{\mu}$ 且 G 是 H 的开集, 则存在 $\hat{S}$ 的开集 $\hat{G}$ 使得 $G = H\hat{G}$. 因

$$\liminf_n \mu_n(G) = \liminf_n \hat{\mu}_n(\hat{G}) \geq \hat{\mu}(\hat{G}) = \mu(G)$$

故 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

定理1 (同胚定理)

1) 设 $\mu, \nu \in M(H)$. 则 $\mu = \nu$ 当且仅当 $L_\mu(s) = L_\nu(s), s \in S$.

2) 设 $\mu \in M(H)$, $\{\mu_n\}$ 是 $M(H)$ 中的网. 则 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ 当且仅当 $L_{\mu_n}(s) \rightarrow L_\mu(s), s \in S$.

证明 1) 根据推论1和引理2有

$$\mu = \nu \Leftrightarrow \hat{\mu} = \hat{\nu} \Leftrightarrow L_{\hat{\mu}}(s) = L_{\hat{\nu}}(s), s \in S \Leftrightarrow L_\mu(s) = L_\nu(s), s \in S.$$

2) 设 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. 对固定的 $s \in S$, 设 $\varphi_s(\rho) = \rho(s)$, 则 φ_s 是 H 上的有界连续函数. 故

$$\int_H \rho(s) \mu_n(d\rho) \rightarrow \int_H \rho(s) \mu(d\rho)$$

设 $L_{\mu_n}(s) \rightarrow L_\mu(s), s \in S$. 根据引理2, $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ 当且仅当 $\hat{\mu}_n \xrightarrow{w} \hat{\mu}; L_{\mu_n}(s) \rightarrow L_\mu(s), s \in S$ 当且仅当 $L_{\hat{\mu}_n}(s) \rightarrow L_{\hat{\mu}}(s), s \in S$. 故可以设 $\mu \in M(\hat{S})$ 及设 $\{\mu_n\}$ 是 $M(\hat{S})$ 中的网. 不难证明 $\hat{S}$ 是闭的, 故 $\hat{S}$ 是紧的, 因而 $M(\hat{S})$ 上的弱拓扑与 $M(\hat{S})$ 上的范拓扑(vague topology)相同.

因为 $\mu_n(\hat{S}) = L_{\mu_n}(e) \rightarrow L_\mu(e) = \mu(\hat{S}) < +\infty$, 故不失一般性可以假设 $\sup_n \mu_n(\hat{S}) < +\infty$. 根据文[1], 命题2.4.6, $\{\mu_n\}$ 的每一个子网 $\{\mu_{n'}\}$ 都有一个子网 $\{\mu_{n''}\}$ 范收敛(从而弱收敛)到某一 $\mu^* \in M(\hat{S})$. 所以有 $L_{\mu_{n''}}(s) \rightarrow L_{\mu^*}(s), s \in S$ 和 $L_{\mu^*}(s) = L_\mu(s), s \in S$. 故 $\mu^* = \mu$, 从而 $\{\mu_n\}$ 弱收敛到 μ .

2 应用: 局部紧空间上的随机测度

下面是应用的例, 更多的应用将会在其它文

章阐述.

设 X 是局部紧 Hausdorff 空间, F 是 X 上的全体有紧支承的非负连续函数. 对 $f_1, f_2 \in F$, 设 $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), x \in X$, 则 $f_1 + f_2 \in F$. 再设 $e(x) = 0, x \in X$. 则 $(F, +, e)$ 是一个可交换半群, 有单位元 e .

称泛函 $T: F \rightarrow [0, +\infty)$ 为 F 上的正线性泛函, 若 $T(e) = 0$ 且 $T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2), f_1, f_2 \in F$. 设 $\tilde{F}$ 为 F 上的全体正线性泛函并赋予 $\tilde{F}$ 从 $[0, +\infty)^F$ 遗传下来的逐点收敛拓扑. 设 $\hat{F}$ 是 F 的全体有界半特征,

$$\hat{F}_+ := \{\rho \in \hat{F} : 0 < \rho(f) \leq 1, f \in F\}$$

对固定的 $T \in \tilde{F}$, 设 $\rho_T(f) = e^{-T(f)}, f \in F$. 则 $\rho_T \in \hat{F}_+$. 下面的引理是显然的.

引理 3 映射 $\varphi: \tilde{F} \rightarrow \hat{F}_+, T \rightarrow \rho_T$ 是同胚映射.

定理 2 (Riesz 表现定理, 例如可参看文 [1], 推论 2.2.3) 设 X 是一局部紧 Hausdorff 空间, $C^c(X)$ 是 X 上全体有紧支承的实值连续函数. 则存在着在 $C^c(X)$ 上的全体正线性泛函 T 和 X 上的全体 Radon 测度 μ 间的由下式给出的 1-1 对应:

$$T(f) = \int f d\mu, f \in C^c(X)$$

设 M 为 X 上的全体 Radon 测度且赋予 M 狭拓扑, 即使得对每一 $f \in F$, 映射 $M \rightarrow [0, +\infty), \mu \rightarrow \int f d\mu$ 都是连续的最粗拓扑. 对 $\mu \in M$, 设 $T_\mu(f) = \int f d\mu, f \in F$. 则 $T_\mu \in \tilde{F}$.

引理 4 映射 $\phi: M \rightarrow \tilde{F}, \mu \rightarrow T_\mu$ 是同胚映射.

证明 根据定理 2, ϕ 是 1-1 映射. 对于 M 中的网 $\{\mu_n\}$ 和 $\mu \in M$, 我们有

$$\mu_n \rightarrow \mu \Leftrightarrow \int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu, f \in F$$

$$F \Leftrightarrow T_{\mu_n}(f) \rightarrow T_\mu(f), f \in F \Leftrightarrow T_{\mu_n} \rightarrow T_\mu$$

故 ϕ 是同胚的.

从引理 3 和引理 4 可以直接得到下面的推论.

推论 2 映射 $\psi := \phi \circ \varphi: M \rightarrow \hat{F}_+$ 是同胚映射.

设 D 是 M 上的全体 Radon 概率测度. $P \in D$ 的 Laplace 泛函定义为

$$L_P(f) = \int_M e^{-\int f d\mu} P(d\mu), f \in F$$

引理 5 设 $P \in D$, 则 $P\psi^{-1}$ 是 $\hat{F}_+$ 上的 Radon

概率测度且 $L_P(f) = L_{P\psi^{-1}}(f), f \in F$.

证明 根据推论 2, ψ 是同胚映射, 故 $P\psi^{-1}$ 是 $\hat{F}_+$ 上的 Radon 概率测度. 又对每一 $f \in F$ 都有

$$L_{P\psi^{-1}}(f) = \int_{\hat{F}_+} \rho(f) P\psi^{-1}(d\rho) =$$

$$\int_M \psi(\mu)(f) P(d\mu) = \int_M e^{-\int f d\mu} P(d\mu) = L_P(f)$$

定理 3

1) 设 $P, Q \in D$, 则 $P = Q$ 当且仅当 $L_P(f) = L_Q(f), f \in F$.

2) 设 $P \in D, (P_n)$ 是 D 中的网, 则 $P_n \xrightarrow{W} P$ 当且仅当 $L_{P_n}(f) \rightarrow L_P(f), f \in F$.

证明 由推论 2, 定理 1 及引理 5 有

$$1) P = Q \Leftrightarrow P\psi^{-1} = Q\psi^{-1} \Leftrightarrow L_{P\psi^{-1}}(f) =$$

$$L_{Q\psi^{-1}}(f), f \in F \Leftrightarrow L_P(f) = L_Q(f), f \in F.$$

$$2) P_n \xrightarrow{W} P \Leftrightarrow P_n\psi^{-1} \xrightarrow{W} P\psi^{-1} \Leftrightarrow L_{P_n\psi^{-1}}(f) \rightarrow L_{P\psi^{-1}}(f), f \in F \Leftrightarrow L_{P_n}(f) \rightarrow L_P(f), f \in F.$$

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, 称映射 $\xi: \Omega \rightarrow M$ 为随机测度, 若 ξ 为 $\mathcal{F}/\mathcal{A}(M)$ 可测的且 $P\xi^{-1}$ 是 M 上的 Radon 测度. 以 $R(M)$ 记 M 上的全体随机测度 (若 P 是 M 上的 Radon 概率测度, 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (M, \mathcal{A}(M), P)$, 映射 $\xi: \Omega \rightarrow M$ 为恒等映射, 则 $\xi \in R(M)$). 故每一 $P \in D$ 也可以看作是一随机测度) $\xi \in R(M)$ 的 Laplace 泛函定义为

$$L_\xi(f) = L_{P\xi^{-1}}(f), f \in F$$

$$\text{即 } L_\xi(f) = L_{P\xi^{-1}}(f) = \int_M e^{-\int f d\mu} P\xi^{-1}(d\mu) = \int_\Omega e^{-\int f d\xi(\omega)} P(d\omega), f \in F$$

从上面定理 3 可以得到下面的推论.

推论 3

1) 设 $\xi, \eta \in R(M)$. 则 $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ 当且仅当 $L_\xi(f) = L_\eta(f), f \in F$.

2) 设 (ξ_n) 是 $R(M)$ 中的网, $\xi \in R(M)$. 则 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ 当且仅当 $L_{\xi_n}(f) \rightarrow L_\xi(f), f \in F$.

上面的例中, 如果再设 X 是第二可数的, 可以证明, 文 [3] 中所述局部分测度就是 Radon 测度. 而定义在 $\mathcal{A}(M)$ 上的概率测度也是 Radon 概率测度. 故在上例中的随机测度的定义与文 [3] 中的定义相同. 推论 3 是文 [3] 的相应的经典结果 (参看文 [3], 定理 3.1 和定理 4.2) 的改进 (无需第二可数性条件及给出了利用一般性定理的新的较简单的证明). (下转第 15 页)

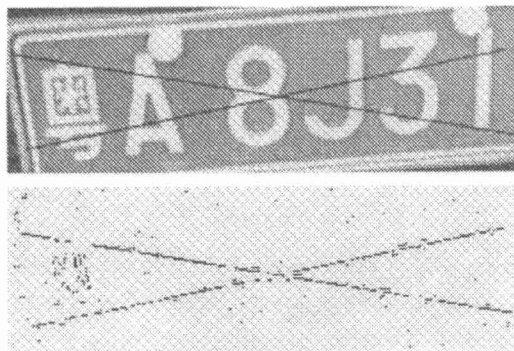


Fig.2 Detection of curves.

The scale of the wavelet transform is $s = 3$

References:

- [1] CANNY J. A computational approach to edge detection [J]. IEEE Trans Pattern Analy Machine Intell, 1986, 8: 679 - 698.
- [2] HARALICK R M. Digital step edges from zero-crossing of second directional derivatives [J]. IEEE Trans Pattern Analy Mach Intell, 1984, 6 (1): 58 - 68.
- [3] ZHENG N N. Computer vision and pattern recognition [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1998.
- [4] MALLAT S, HWANG W L. Singularity detection and processing with wavelets [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1992, 38 (2): 617 - 643.
- [5] TANG Y Y, YANG L H, FENG L. Characterization and detection of edges by Lipschitz exponent and MASW wavelet transform [C]. Proc the 14th Int Conf in Pattern Recognition. Brisbane, 1998. 1572 - 1574.
- [6] TANG Y Y, YANG L H, LIU J M. Characterization of Dirac-structure edges with wavelet transform [J]. IEEE Trans Sys Man Cyb, 2000, 30 (1): 93 - 109.

一种新的基于小波变换的2维边缘刻划特征

杨力华, 刘亦书, 李 峰

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘 要: 利用2个新的小波建立了图像中曲线的小波变换之局部极大模刻划特征, 然后利用这些特征设计了检测图像中曲线的算法。

关键词: 小波变换; 边缘检测

中图分类号: 0235

(上接第11页)

参考文献:

- [1] BERG C, CHRISTENSEN J P R, RESSEL P. Harmonic analysis on semigroups, theory of positive definite and related functions [M]. New York: Springer-Verlag, 1984. 100.
- [2] KELLEY J L. General topology [M]. New York: Van Nostrand, 1955.
- [3] KALLENBERG O. Random measures [M]. 3rd edition. Berlin: Akademie-Verlag, 1983.

The Homeomorphism Theorem of Bounded Semicharacters and Its Applications

HE Yuan-jiang

(Department of Statistics Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Let $(S, +, e)$ be a commutative semigroup with neutral element e . A bounded semicharacter is a function $\rho: S \rightarrow [-1, 1]$ such that $\rho(e) = 1$ and $\rho(s + t) = \rho(s)\rho(t)$, $s, t \in S$. Let H be a set of some bounded semicharacters, $M(H)$ be the set of all finite Radon measures on H . Then holds the homeomorphism theorem: The mapping $\mu \rightarrow L_\mu: = \int_H \rho(s) \mu(d\rho)$, $s \in S$ is a homeomorphism from $M(H)$ to a subset of $\mathbb{R}^S$. Using this theorem, a new and simpler proof is given for the corresponding canonical propositions of the random measure on a locally compact space, without the second countability condition.

Keywords: semigroup; Radon measure; positive definite function; Laplace functional; random measure