

Hilbert 空间上带跳倒向随机微分方程的解 (II)*

司徒荣, 黄 敏

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 进一步研究 Hilbert 空间中由柱体布朗运动和 Poisson 鞅测度驱动的带跳倒向随机微分方程在非李氏条件下解的存在惟一性, 并且还得到了解的极限定理.

关键词: 带跳倒向随机微分方程 (BSDE); 非李氏系数; 适应解; Itô 公式; 极限定理

中图分类号: O241.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 04-0020-04

考虑下述 BSDE

$$x_t = X + \int_t^T b(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds - \int_t^T q_s dw_s - \int_t^T \int_Z p_s(z) \tilde{N}_k(ds, dz)$$

其中, 有关符号的定义及假设条件见文 [1].

下面, 将结合文 [2~5] 的方法和 [6] 关于有限维连续 BSDE 解的方法, 来推出非李氏条件下 Hilbert 空间中的带跳 BSDE 解的存在惟一性.

定理 1 设

$$(H1) \quad |b(t, x, q, p, \omega)|_H \leq c_1(t)(1 + |x|_H) + c_2(t)(\|q\| + \|p\|)$$

$$(H2) \quad |b(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b(t, x_2, q_2, p_2, \omega)| \leq$$

$$c_1(t)\rho(|x_1 - x_2|_H^2) + c_2(t)(\|q_1 - q_2\|^2 + \|p_1 - p_2\|)$$

其中, $c_1(t), c_2(t), \rho(\cdot)$ 满足文 [1] (H2) 之条件, 则

$$x_t = X + \int_t^T b(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds - \int_t^T q_s dw_s - \int_t^T \int_Z p_s(z) \tilde{N}_k(ds, dz) \quad (1)$$

存在惟一解: $(x_t, q_t, p_t) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H) \times L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathcal{L}^2(K, H)) \times F^2_{\mathcal{F}}(0, T; H)$.

[注]: 定理 1 在 H 为有限维空间时, 明显地蕴含了文 [6] 的有关结果. 并且, 即使在有限维空间与 BSDE 不带跳的情形, 定理 1 之条件也比文 [6] 的假设为弱.

证明 给定 $x = 0$, 有方程,

$$x_1(t) = X + \int_t^T b(s, 0, q_1(s), p_1(s), \omega) ds - \int_t^T q_1(s) dw_s - \int_t^T \int_Z p_1(s, z) \tilde{N}_k(ds, dz)$$

其中, $b(s, 0, q_1, p_1, \omega)$ 满足李氏条件, 故有惟一解 $(x_1(t), q_1(t), p_1(t))$. 对 $x_1(t)$ 有

$$x_2(t) = X + \int_t^T b(s, x_1(s), q_2(s), p_2(s), \omega) ds - \int_t^T q_2(s) dw_s - \int_t^T \int_Z p_2(s, z) \tilde{N}_k(ds, dz)$$

如此迭代, 可得到 $\{x_n(t), q_n(t), p_n(t)\}$ 满足:

$$x_n(t) = X + \int_t^T b(s, x_{n-1}(s), q_n(s), p_n(s), \omega) ds - \int_t^T q_n(s) dw_s - \int_t^T \int_Z p_n(s, z) \tilde{N}_k(ds, dz) \quad (2)$$

利用 Itô 公式可证,

$$\begin{aligned} E |x_n(t)|_H^2 &\leq E \int_t^T 2 |x_n(s)|_H |b(s, x_{n-1}(s), q_n(s), p_n(s), \omega)|_H ds - \\ &\quad E \int_t^T \|q_n(s)\|^2 ds - E \int_t^T \|p_n(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可证明

* 基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目 (79790130)

收稿日期: 2000-07-21; 作者简介: 司徒荣 (1935-), 男, 教授, 博士生导师.

$$\sup_{t \in [0, T]} E |x_n(t)|_H^2 \leq k, \forall n$$

由 ρ 的凹性, 知 $\exists a, b \in \mathbf{R}$, 使得 $\rho(u) \leq a + bu$.

记 $x_i^{m,n} = x^{n+m}(t) - x^n(t)$, 其余类似. 由 Itô 公式有,

$$E |x_i^{m,n}|_H^2 \leq E \int_t^T |2x_s^{m,n}|_H |b(s, x_s^{m+n-1}, q_s^{m+n}, p_s^{m+n}, \omega) - b(s, x_s^{n-1}, q_s^n, p_s^n, \omega)|_H ds - E \int_t^T (\|q_s^{m,n}\|^2 + \|p_s^{m,n}(s)\|^2) ds$$

再由 Gronwall 不等式有

$$E |x_i^{m,n}|_H^2 \leq k \int_t^T \rho(E |x_s^{m,n-1}|_H^2) ds$$

由上式可得

$$E |x_i^{m,n}|_H^2 \leq k(a + b \sup_{s \in [0, T]} E |x_s^{m,n-1}|_H^2)(T - t) \leq c_0(T - t)$$

现记 $\bar{\rho}(\cdot) \triangleq k\rho(\cdot)$, 对 $\bar{\rho}$, $\exists T_1 < T$, 对 $\forall t \in [T_1, T]$, $\bar{\rho}(c_0(T - t)) \leq c_0$.

记 $\varphi_1(t) = c_0(T - t)$, $\varphi_{n+1}(t) \triangleq \int_t^T \bar{\rho}(\varphi_n(s)) ds$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\bar{\varphi}^{m,n}(t) = E |x_i^{m,n}|_H^2 \quad m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$$

则用归纳法可证: 当 $t \in [T_1, T]$, 有

$$\varphi_{n+1}(t) = \int_t^T \bar{\rho}(\varphi_n(s)) ds \leq \int_t^T \bar{\rho}(\varphi_{n-1}(s)) ds = \varphi_n(t)$$

同理由归纳法可证:

$$\bar{\varphi}^{m,n}(t) \leq \int_t^T \bar{\rho}(E |x_s^{m+n-1} - x_s^{n-1}|_H^2) ds \leq \int_t^T \bar{\rho}(\varphi_n(s)) ds = \varphi_n(t)$$

综上所述,

$$\bar{\varphi}^{m,n}(t) \leq \varphi_n(t) \leq \varphi_{n-1}(t) \leq \dots \leq \varphi_1(t), \forall t \in [T_1, T], \forall m, n$$

$$\varphi(t) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_t^T \bar{\rho}(\varphi_{n-1}(s)) ds = \int_t^T \bar{\rho}(\varphi(s)) ds = \int_t^T k\rho(\varphi(s)) ds \quad \forall t \in [T_1, T]$$

故 $\varphi(t) \equiv 0$, 当 $t \in [T_1, T]$, 从而

$$\sup_m \sup_{t \in [T_1, T]} \bar{\varphi}^{m,n}(t) \leq \varphi_n(t) \leq \varphi_n(t) \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty.$$

故得 $\{x_n(t)\}$ 是 $L^2(T_1, T; H)$ 上的基本列, 其极限存在于 $[T_1, T]$ 上.

由此易知 $\{q_n(t), p_n(t)\}$ 亦是 $L^2(T_1, T; \mathcal{S}^2(K, H)) \times F^2(T_1, T; H)$ 上的基本列. 故通过对 n 取极限, 可得 BSDE 于 $[T_1, T]$ 上有解 (x_t, q_t, p_t) . 由文[1]的定理3可知此解也是 $[T_1, T]$ 上的惟一解. 故由此经过有限步, 可推知方程(1)在 $[0, T]$ 上也有惟一解. 证完.

现讨论解之极限定理

定理2 设

$$1) \quad \langle x, b^n(t, x, q, p, \omega) \rangle \leq c_1(t)(1 + |x|_H^2) + c_2(t) |x|_H (\|q\| + \|p\|),$$

$$\text{且} \quad E \left(\int_0^T |b^n(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega)|_H ds \right)^2 < \infty, \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2) \quad \langle x_1 - x_2, b^0(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b^0(t, x_2, q_2, p_2, \omega) \rangle \leq c_1(t) \rho(|x_1 - x_2|_H^2) + c_2(t) (|x_2 - x_1|_H (\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|))$$

其中, $c_1(t), c_2(t), \rho(\cdot)$ 满足文[1]中(H2)的性质.

$$3) \quad X^n \in \mathcal{F}_T, E |X^n|_H^2 < \infty, \forall n = 0, 1, 2, \dots, \text{ 且 } E |X^n - X^0|_H^2 \rightarrow 0$$

$$4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \sup_{(x, q, p, \omega)} |b^n(t, x, q, p, \omega) - b^0(t, x, q, p, \omega)|_H^2 dt = 0$$

若 (x_t^n, q_t^n, p_t^n) 分别是下列方程的解, $0 \leq t \leq T, n = 0, 1, 2, \dots$

$$x_t^n = X^n + \int_t^T b^n(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) ds - \int_t^T q_s^n dw_s - \int_t^T \int_Z p_s^n(z) \tilde{N}(ds, dz)$$

则 $\forall 0 \leq t \leq T$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sup_{t \in [t_0, T]} |x_t^n - x_t^0|_H^2 + \int_0^T (\|q_s^n - q_s^0\|^2 + \|p_s^n - p_s^0\|^2) ds \right] = 0$$

证明

$$\begin{aligned} x_t^n - x_t^0 &= X^n - X^0 + \int_t^T [b^n(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) - b^0(s, x_s^0, q_s^0, p_s^0, \omega)] ds - \\ &\quad \int_t^T (q_s^n - q_s^0) dw_s - \int_t^T \int_Z (p_s^n(z) - p_s^0(z)) \tilde{N}(ds, dz) \end{aligned}$$

若设 $c(r)^2 = 4c_2(r)^2 + 2c_1(r) + 1$, $\rho_1(u) = \rho(u) + u$, 则有

$$\begin{aligned} E \left(|x_t^n - x_t^0|_H^2 + \int_t^T \|q_s^n - q_s^0\|^2 ds + \int_t^T \int_Z |p_s^n - p_s^0|_H^2 \pi(dz) ds \right) \leq \\ k_1 \left(\int_t^T c(s)^2 \rho_1(E |x_s^n - x_s^0|_H^2) ds + E |X^n - X^0|_H^2 \right) + \\ k_1 E \int_t^T |b^n(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) - b^0(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega)|_H^2 ds \end{aligned} \quad (3)$$

根据假设 1) 及文 [1] 的定理 2 可得

$$E |x_t^n - x_t^0|_H^2 \leq k_0$$

故

$$\rho E(|x_t^n - x_t^0|_H^2) \leq \rho(k_0)$$

再由假设 3) 及 (3) 式可两端取极限

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E |x_t^n - x_t^0|_H^2 \leq k_0 \left(\int_t^T c_1(s)^2 \rho_1(E \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_s^n - x_s^0|_H^2) ds \right)$$

故由文献 [7] 有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E |x_t^n - x_t^0|_H^2 = 0$.

同理有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_t^T \|q_s^n - q_s^0\|^2 ds + E \int_t^T \int_Z |p_s^n - p_s^0|_H^2 \pi(dz) ds \right) = 0$$

现对正向 SDE 用 Itô 公式, 不难得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sup_{t \in [t_0, T]} |x_t^n - x_t^0|_H^2 \right] = 0$$

证完.

定理 3 设

1) $|b^n(t, x, q, p, \omega)|_H \leq c_1(t)(1 + |x|_H) + c_2(t)(\|q\| + \|p\|)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2) $\langle x - y, b^n(t, x, q_1, p_1, \omega) - b^n(t, y, q_2, p_2, \omega) \rangle \leq$

$c_1(t)\rho(|x - y|_H^2) + c_2(t)(|x - y|_H(\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|)), n = 1, 2, \dots$

其中, $c_1(t), c_2(t), \rho(t)$ 满足文 [1] 中 (H2) 性质;

3) 与定理 2 中 3) 相同

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n(t, x, q, p, \omega) = b^0(t, x, q, p, \omega)$. P - a. s. 则定理 2 的结论仍真.

证明 类似定理 2, 可得

$$\begin{aligned} |x_t^n - x_t^0|_H^2 &= \int_t^T 2(x_s^n - x_s^0, b^n(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) - b^0(s, x_s^0, q_s^0, p_s^0, \omega)) ds + \\ &\quad |X^n - X^0|_H^2 - \int_t^T \|q_s^n - q_s^0\|^2 ds - \int_t^T \int_Z |p_s^n(z) - p_s^0(z)|_H^2 \pi(dz) ds + \text{鞅}, \\ E \left[|x_t^n - x_t^0|_H^2 + \frac{1}{2} \|q_s^n - q_s^0\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_t^T \int_Z |p_s^n(z) - p_s^0(z)|_H^2 \pi(dz) ds \right] \leq \\ &\quad k_1 \left(\int_t^T c(s)^2 \rho_1(E |x_s^n - x_s^0|_H^2) ds + E |X^n - X^0|_H^2 \right) + \end{aligned}$$

$$k_1 \mathbb{E} \int_t^T |b^n(s, x_s^0, q_s^0, p_s^0, \omega) - b^0(s, x_s^0, q_s^0, p_s^0, \omega)|_H^2 ds \quad (4)$$

其中, 设 $c(r)^2 = c_2(r)^2 + c_1(r) + 1$, $\rho_1(u) = \rho(u) + u$. 因为 b^n 被可积函数控制, 根据假设 4) 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_t^T |b^n(s, x_s^0, q_s^0, p_s^0, \omega) - b^0(s, x_s^0, q_s^0, p_s^0, \omega)|_H^2 ds = 0$$

所以, 可对 (4) 式两边取极限, 再由假设 3), 有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} |x_t^n - x_t^0|_H^2 \leq k_1 \left(\int_t^T c(s)^2 \rho_1 \mathbb{E} \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} |x_s^n - x_s^0|_H^2 \right) ds \right)$$

故由文献 [7] 有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} |x_t^n - x_t^0|_H^2 = 0$$

由 (4) 式可见

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E} \int_t^T \|q_s^n - q_s^0\|^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T \int_Z |p_s^n - p_s^0|^2 \pi(dz) ds \right) = 0$$

现对正向 SDE 用 Itô 公式, 又可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |x_s^n - x_s^0|_H^2 = 0$$

证完.

参考文献:

- [1] 司徒荣, 黄敏. Hilbert 空间上带跳倒向随机微分方程的解(I)[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2001, 40(3): 1-5.
- [2] SITU R. On solutions of backward stochastic differential equations with jumps and applications[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1997, 66: 209-236.
- [3] 司徒荣, 曾爱婷. 无界停时带跳倒向随机微分方程解的存在惟一性(I)[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1999, 38(3): 1-6.
- [4] 司徒荣, 曾爱婷. 无界停时带跳倒向随机微分方程解的存在惟一性(II)[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1999, 38(4): 1-5.
- [5] 司徒荣, 王越平. 无界停时终端非李氏系数带跳倒向随机微分方程及拟线性椭圆偏微分方程解的概率表示[J]. 应用数学与力学, 2000, 21(6): 597-609.
- [6] MAO X. Adapted solutions of backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients[J]. Stochastic Process and Their Application, 1995, 58: 281-292.
- [7] SITU R. On strong solution, uniqueness, stability and comparison theorem for a stochastic system with Poisson jumps[M]. Lecture Notes in Control & Inform Sci; vol. 75, Distributed Parameter System. Berlin: Springer, 1985. 352-381.

On Solutions of Backward Stochastic Differential Equations with Jumps in Hilbert Spaces

SITU Rong, HUANG Min

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The existence and uniqueness of solutions to BSDEs with jumps and with cylindrical Brownian motion process in Hilbert space under non-Lipschitzian condition are proved. Some convergence theorems of solutions to such BSDEs are also given.

Keywords: backward stochastic differential equations with jumps (BSDE); Itô's formula; non-Lipschitzian coefficient; adapted solutions; convergence theorems