

基于符号变量运算的状态空间方程离散化^{*}

吕志民, 林恩华

(中山大学电子与通信工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 针对 MATLAB 控制系统工具箱中模型转换命令, 不能对带符号变量连续状态空间方程进行离散化, 提出借助符号数学工具箱中有关符号对象函数构成 M 文件, 自动完成此过程. 该方法与常规方法所得结果比较, 两者完全一致, 证明此方法的正确性与实用性.

关键词: 符号变量; 离散化; 符号数学工具箱

中图分类号: TP217.82; TP273.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 06-0024-03

计算机控制系统设计, 常需要把连续时间系统的状态空间表达式离散化. 当系统的采样周期 T 被确定为某一数值时, 利用 MATLAB 软件包控制系统工具箱 (control system toolbox) 模型转换命令, 很容易求出离散状态下各矩阵^[1]. 然而, 国内外不少文献在阐述系统离散化过程中, 常把 T 当为一个变量, 以强调理论推导过程普遍性以及 T 的变化对离散结果的影响^[2]. 在这种情况下, 上述计算机辅助设计方法不能使用.

带符号变量运算的连续系统状态空间方程离散化, 涉及大量矩阵数学运算, 过程相当繁杂^[2]. 本文介绍借助 MATLAB 的符号数学工具箱 (symbolic math toolbox) 中有关符号对象函数^[3], 建立相应的 M 文件, 能自动完成带符号变量运算的离散化过程, 并能显示每个步骤的计算结果, 对促进计算机辅助教学 (CAI) 和计算机辅助设计 (CAD) 有一定的作用. 使用本方法的离散结果与控制系统工具箱模型转换命令所得的结果相比较, 两者完全一致, 说明本方法的正确性.

1 连续状态空间方程离散化综述

设线性时不变连续状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, F, G, H, J 均为定常系数矩阵.

若系统采样周期 T 为常数值, 在 MATLAB 工作环境下, 使用下面的模型转换命令, 很容易

求得离散状态空间表达式各矩阵.

$$\begin{aligned} [A, B, C, D] &= \\ C2dm(F, G, H, J, T, 'method') \end{aligned} \quad (2)$$

式中, A, B, C, D 分别为离散状态表达式的状态转移矩阵、输入矩阵、输出矩阵和传输矩阵. 在线性时不变系统中, 矩阵 H, J 和矩阵 C, D 离散化前后对应相等. method 为离散化方法, 包括零阶保持器 (ZOH) 法、一阶保持器 (FOH) 法、Tustin 法、预扭曲 (prewarp) 法和零极点匹配 (matched) 法.

若采样周期 T 为符号变量, 上述模型转换命令不能使用, 只能按照连续系统离散化经典理论, 计算矩阵指数函数 e^{FT} , 再求出离散模型矩阵 $A(T)$ 与 $B(T)$.

$$A(T) = e^{FT} = L^{-1}(sI - F)^{-1} \quad (3)$$

$$B(T) = \int_0^T e^{F(T-t)} dt \cdot G \quad (4)$$

最后得到零阶保持器作用下的离散状态空间方程.

$$\begin{aligned} x[(k+1)T] &= A(T)x(kT) + \\ &B(T)u(kT) \end{aligned} \quad (5)$$

上述过程涉及矩阵求逆、矩阵的 Laplace 逆变换、矩阵的定积分和矩阵的乘法, 求解过程非常繁杂.

2 基于符号数学工具箱的离散化过程

符号数学工具箱是在加拿大 Waterloo 大学开发的 MAPLE 软件基础上^[4], 近几年被拓展到 MATLAB 5.X 软件包中. 下面的离散化过程, 同

^{*} 收稿日期: 2001-02-12; 作者简介: 吕志民 (1946—), 男, 副教授.

时也展现了该工具箱强大的符号运算功能。

设连续时间系统状态空间方程表达式如式 (1) 所示, 其中

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ H &= [1 \quad 2] & J &= [\quad 0] \end{aligned}$$

采样周期 T 为变量。

步骤 1 使用符号对象函数 `syms` 定义 s, t, T 为符号变量, 定义 I 为 2 阶单位矩阵, 计算 $(sI - F)$ 的逆矩阵 P 。

$$P = \text{inv}((sI - F))$$
$$P = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+6s+8} & -\frac{1}{s^2+6s+8} \\ \frac{3}{s^2+6s+8} & \frac{s+5}{s^2+6s+8} \end{bmatrix}$$

步骤 2 用符号函数 `laplace` 分别求出 P 各符号元素的 `laplace` 逆变换, 用替换函数 `subs` 把结果中的变量 t 用采样周期 T 进行置换, 求出离散系统状态转移矩阵 $A(T)$ 。

$$A(T) = \begin{bmatrix} 3/2 \times \exp(-4 \times T) - 1/2 \times \exp(-2 \times T) \\ -3/2 \times \exp(-4 \times T) + 3/2 \times \exp(-2 \times T) \\ 1/2 \times \exp(-4 \times T) - 1/2 \times \exp(-2 \times T) \\ -1/2 \times \exp(-4 \times T) + 3/2 \times \exp(-2 \times T) \end{bmatrix}$$

步骤 3 按式 (4) 用符号函数 `int` 分别求 $A(T)$ 各元素定积分, 结果与矩阵 G 相乘, 得离散系统输出矩阵 $B(T)$ 。

$$B(T) = \begin{bmatrix} 2 \times (-3/8 + 1/4 \times \exp(2 \times T)) \times \exp(-4 \times T) - \\ 2 \times (3/8 - 3/4 \times \exp(2 \times T)) \times \exp(-4 \times T) + 31/8 + \\ 3/8 + (5 \times (-1/8 + 1/4 \times \exp(2 \times T)) \times \exp(-4 \times T)) \\ 5 \times (1/8 - 3/4 \times \exp(2 \times T)) \times \exp(-4 \times T) \end{bmatrix}$$

上述运算结果, 与理论推导完全一致, 至此离散状态空间方程式 (5) 完全确定。

3 结果比较

设离散系统采样周期 T 分别取不同数值, 式 (2) 中 `method` 选用零阶保持器 (ZOH) 法, 求得矩阵 $A、B$ 的数值如表 1 所示。

表 1 用模型转换命令求出矩阵 A 和 B 的数值
Tab. 1 The numerical values of matrix A and B to model conversion command

T	0.1	0.5	1.0
A 各元素数值	0.5961 -0.0742 0.2226 0.8929	0.0191 -0.1163 0.3488 0.4842	-0.0402 -0.0585 0.1755 0.1938
B 各元素数值	0.1361 0.4984	0.082 2.1297	-0.1633 3.1897

为方便结果比较, 选用符号数学工具箱中可变精度函数 `vpa`, 使矩阵 A 与 B 的计算结果均取 5 位有效数字, 以方便看出表 1 中数据 4 舍 5 入的结果。

借助替换函数 `subs` 分别求出 $A(T)$ 与 $B(T)$ 的数值, 当 T 取值 0.1 时, A 与 B 的数值可由下式求得

$$\begin{cases} A = \text{subs}(A, T, 0.1); \\ A = \text{vpa}(A, 5); \\ B = \text{subs}(B, T, 0.1); \\ B = \text{vpa}(B, 5); \end{cases} \quad (6)$$

采样周期 T 分别取不同数值, 式 (6) 求得 A 与 B 的数值如表 2 所示。

表 2 用符号变量运算求出 A 和 B 的数值¹⁾
Tab. 2 The numerical values of matrix A and B to symbolic variable operation

T	0.1	0.5	1.0
A 各元素数值	0.59613 -0.007421 0.2226 0.89294	0.01907 -0.11627 0.34881 0.48415	-0.040196 -0.058512 0.17554 0.19385
B 各元素数值	0.13611 0.4984	0.0823 2.1296	-0.16334 3.1896

1) 数据除最后一位数字因 4 舍 5 入有误差外, 其余各位数字均与表 1 数据相同。

4 结 论

利用符号数学工具箱中的符号对象函数，编程建立 M 文件，能自动完成带符号变量连续系统状态空间方程离散化，可输出带符号变量的矩阵表达式，在符号变量取定值时，能求出矩阵表达式相应的数值解，而且计算精度在一定范围内随意选择。实践证明，该方法在 CAI 和 CAD 过程中十分有用。

参考文献:

[1] MOSCINSKI J. Advanced control with MATLAB and SIMULINK[M] . Ellis Horwood Limited, 1995.
[2] JACQUOT R G. Modern digital control system [M] . Marcel Dekker Inc. 1981.
[3] HANSELMAN D, LITTLEFIELD B. Mastering MATLAB: a comprehensive tutorial and reference [M] . Prentice Hall, 1996.
[4] ANDERSON P H, MAPLE V. Applications to electrical circuit analysis [M] . Prentice Hall, 1995.

The Discretization of State space Equation
Based on Symbolic Variable Operation

LÜ Zhi min, LIN En hua

(Department of Electronics and Communication Engineering,
Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A discretization method of continuous system state space equation with symbolic variable operation is presented by using the symbolic object functions in MATLAB symbolic math toolbox. The result shows it is a correct and pratical method.

Keywords: symbolic variable; discretization; symbolic math toolbox