

弹性管内无粘流体的非线性波动*

孙明光, 吴春亮, 徐 翔, 詹杰民
(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究弹性管内无粘流体的非线性波动, 当弹性直管中存在局部凸块时, 导出其双向传播的修正 Boussinesq 方程及单向传播的修正 KdV 方程. 用数值法计算修正 KdV 方程的解, 结果发现: 波动峰值在经过凸块后有降低的趋向.

关键词: 非线性波动; KdV 方程; 弹性管; 局部凸块

中图分类号: O353.1; Q811.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 05-0006-03

在输油软管内流体的流动, 或人体动脉的血流等问题中, 都涉及弹性管内的流体波动, 它显得十分重要. 例如血管中如存在血栓, 就会引起血压降低, 导致心血管系统不能正常工作^[1,2]. 实验还发现^[3], 动脉狭窄后有扩张的现象, 但其远端压力低于近端压力, 这一结果无法用常理进行解释. 因为按常理, 除粘性因素外, 扩张的结果, 应是流速减小, 压力增高. 本文试图将非线性水波的理论^[4]推广到有局部凸块的弹性管内无粘流体的非线性波动, 导出双向传播的修正 Boussinesq 方程及单向传播的修正 KdV 方程, 并对后者用数值方法求解, 证实波峰值经过局部凸块之后有降低的趋向, 给动脉血管狭窄后再扩张时的压力变化作出一个可能的解释.

1 弹性直管内非线性波动的支配方程

将动脉血管简化为半径为 a 的弹性管, 将血流近似看为不可压无粘流体的轴对称流动^[1], 引入极坐标系 (r, θ, x) , 其中 x 与管中心线重合. 再引入流动速度势 ϕ , 其满足的拉斯方程的极坐标形式为:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (0 < r < a + \eta) \quad (1)$$

在壁面的运动学边界条件为:

$$\eta_t + \phi_x \eta_x = \phi_r \quad (r = a + \eta) \quad (2)$$

在壁面的动力学边界条件为:

$$\rho \phi_t + \frac{1}{2} \rho |\nabla \phi|^2 + P = C \quad (r = a + \eta)$$

不失一般性, 可取常数 $C = 0$. 假设弹性壁条件为

$$P = E \left(\frac{h}{a} \right) \left(\frac{\eta}{a} \right) \quad (r = a + \eta)$$

联合上述 2 式, 得

$$\rho \phi_t + \frac{1}{2} \rho |\nabla \phi|^2 = -E \left(\frac{h}{a} \right) \left(\frac{\eta}{a} \right) \quad (r = a + \eta) \quad (3)$$

在管中心线应满足条件

$$\phi_r \text{ 有界}, (r = 0) \quad (4)$$

其中, η 为弹性管壁径向位移, E 为弹性模量, P 为壁面处压力, t 为时间, ρ 为流体密度, h 为壁厚.

(1) ~ (4) 式构成了弹性直管内无粘流体耦合的非线性波动的数学模型. 如将其线性化, 则可得线性波传播速度 C 的表示式:

$$C = \sqrt{\frac{Eh I_1(ka)}{\rho ka^2 I_0(ka)}}$$

其中, k 为波数, I_0, I_1 为虚变元贝塞尔函数. 对于长波 $ka \ll 1$, 则

$$C \approx \sqrt{\frac{Eh}{2\rho a}}$$

这与已有的结果相一致.

设 A 为特征振幅, L 为特征长度, 引入非线性特征参数 $\epsilon = A/a$ 和管径特征参数 $\mu = a/L$, 并设其满足 Boussinesq 假设: $\epsilon = O(\mu^2) \ll 1$. 设 $a = a_0[1 + \epsilon b(x)]$, 其中 $b(x)$ 为描述管内凸块形状的函数. 引入无量纲量:

$$x^* = \frac{x}{L}, \gamma^* = \frac{\gamma}{a}, t^* = \frac{t}{L} \sqrt{Eh/\rho a_0},$$

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19802023)

收稿日期: 2000-12-01; 作者简介: 孙明光 (1938 -), 男, 教授.

$$\phi^* = \frac{\phi}{\frac{LA}{a_0} \left(\frac{Eh}{\rho a_0} \right)^{\frac{1}{2}}}, \eta^* = \frac{\eta}{A} \quad (5)$$

将(5)式代入方程(1),(2),(3)及(4)中,得(其中上标*已被略去)

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r}\phi_r + \mu^2\phi_{xx} = 0$$

$$(0 < r < 1 + \varepsilon\eta + \varepsilon b) \quad (6)$$

$$\mu^2\eta_t + \mu^2\varepsilon\eta_x\phi_x = \phi_r \quad (r = 1 + \varepsilon\eta + \varepsilon b) \quad (7)$$

$$\mu^2(\eta + \phi_t) + \frac{1}{2}\varepsilon(\mu^2\phi_x^2 + \phi_r^2) = 0$$

$$(r = 1 + \varepsilon\eta + \varepsilon b) \quad (8)$$

$$\phi_r = 0 \quad (9)$$

设 $\phi(r, x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \phi_n(x, t)$, 代入(6)式有:

$$(2\phi_2 + 6r\phi_3 + \cdots) + \frac{1}{r}(\phi_1 + 2r\phi_2 + 3r^2\phi_3 + \cdots) +$$

$$\mu^2(\phi_{0xx} + r\phi_{1xx} + r^2\phi_{2xx} + \cdots) = 0$$

比较 r 的各阶次

$$O(1/r) \quad \phi_1 = 0$$

$$O(1) \quad 2\phi_2 + 2\phi_2 + \mu^2\phi_{0xx} = 0$$

$$O(r) \quad 6\phi_3 + 3\phi_3 + \mu^2\phi_{1xx} = 0$$

$$\text{即 } \phi_{n+2} = -\frac{\mu^2}{(n+2)^2}\phi_{nxx} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

由 $\phi_1 = 0$ 不难得到 $\phi_{2n+1} = 0, (n = 1, 2, \cdots)$ 及

$$\phi_2 = -\frac{\mu^2}{2^2}\phi_{0xx}, \phi_4 = -\frac{\mu^2}{4^2}\phi_{2xx} = (-1)^2 \frac{(\mu^2)^2}{4^2 \cdot 2^2}\phi_{0xxxx}$$

因而有

$$\phi = \phi_0 - \frac{1}{4}\mu^2 r^2 \phi_{0xx} + \frac{1}{64}\mu^4 r^4 \phi_{0xxxx} + O(\mu^6) \quad (10)$$

将上式代入(7)及(8)式,保留至 $O(\varepsilon, \mu^2)$ 项,有

$$\eta_t + \varepsilon\eta_x\phi_{0x} = -\frac{1}{2}\phi_{0xx} -$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon(\eta + b)\phi_{0xx} + \frac{1}{16}\mu^2\phi_{0xxx} \quad (11)$$

$$\eta + \phi_{0t} - \frac{1}{4}\mu^2\phi_{0xxt} + \frac{1}{2}\varepsilon(\phi_{0x})^2 = 0 \quad (12)$$

设 $W = \phi_{0x}$, (12)式对 x 取微商后变为

$$\eta_x + W_t - \frac{1}{4}\mu^2 W_{xxt} + \varepsilon W W_x = 0 \quad (13)$$

而(11)式则变为

$$\eta_t + \varepsilon\eta_x W = -\frac{1}{2}W_x -$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon(\eta + b)W_x + \frac{1}{16}\mu^2 W_{xxx} \quad (14)$$

此即为波双向传播时的修正 Boussinesq 方程.

略去高阶项时,上2式变为: $\eta_x = -W_t$ 及

$$\eta_t = -\frac{1}{2}W_x, \text{ 消去 } \eta, \text{ 得 } W_{tt} = \frac{1}{2}W_{xx}.$$

上式的解为: $W = W\left(x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$

当凸块高度很小时,反射波可以忽略,此时不妨设

$$W = \sqrt{2}\eta + \varepsilon A + \mu^2 B \quad (15)$$

其中, A, B 为待定函数,将条件(15)代入(14)及(13)式,有

$$\eta_t + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_x + \varepsilon\left(\frac{1}{2}A_x + \sqrt{2}\eta\eta_x + \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + b)\eta_x\right) +$$

$$\mu^2\left(\frac{1}{2}B_x - \frac{\sqrt{2}}{16}\eta_{xxx}\right) = 0 \quad (16)$$

$$\eta_t + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_x + \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{2}}A_t + \sqrt{2}\eta\eta_x\right) +$$

$$\mu^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}B_t - \frac{1}{4}\eta_{xxt}\right) = 0 \quad (17)$$

注意这里所考虑的是单向传播的波(沿 x 轴正向),有

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x} + O(\varepsilon)$$

将(16)与(17)式相减,并比较 ε, μ^2 量阶,得

$$A_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + b)\eta_x \quad (18)$$

$$B_x = \frac{3\sqrt{2}}{16}\eta_{xxx} \quad (19)$$

将上2式代入(16)或(17)式,得

$$\eta_t + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon b + \frac{5\sqrt{2}}{4}\varepsilon\eta\right)\eta_x +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{32}\mu^2\eta_{xxx} = 0 \quad (20)$$

$$\text{或 } \eta_T + \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon b + \frac{5}{2}\varepsilon\eta\right)\eta_x + \frac{1}{16}\mu^2\eta_{xxx} = 0,$$

(其中 $T = \frac{t}{\sqrt{2}}$).

上式即为管壁存在凸块时的修正 KdV 方程,当 $b = 0$ 时,即为无凸块等管径的直管情形,此时方程(20)将变为经典的 KdV 方程.

2 修正 KdV 方程的数值解

对于 $b = 0$ 情形, (20) 式变为经典的 KdV

方程形式,其解已有很多的讨论,在这里主要通过方程(20)的数值解,讨论凸块的存在对于波动的影响,显然由于凸块的存在,方程(20)的解与经典 KdV 方程的解的性质会有很多的不同.例如对于孤立子的传播(η, η_x 及 $\eta_{xx} \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow \pm \infty$),“动量”及“能量”将不再守恒,因为由方程(20)可知:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx = -\frac{\sqrt{2}}{4} \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} b \eta_x dx \neq 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \eta^2 dx = -\frac{\sqrt{2}}{4} \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} b \eta \eta_x dx \neq 0$$

计算采用全隐格式,算例取 $\epsilon = 0.1, \mu = 0.32$, 初值 $\eta(x, 0) = \text{sech}^2 5(x - 1.5)$

$$b(x) = \begin{cases} 0 & (x > 10.2), \\ -5.0, -2.0 & (x = 10.0) \\ 0 & (x < 9.8) \end{cases}$$

在 (9.8, 10.0) 与 (10.0, 10.2) 之间为线性分布.

计算结果如图 1 所示.

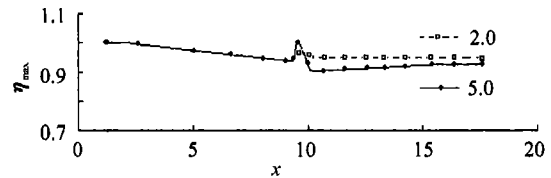


图1 不同距离 x 对应的峰值

Fig.1 Peak values corresponding to distances x

3 结 论

计算结果表明,非线性波动经过管内的局部凸块之后,其最大值沿管长方向有可能是降低的,而由弹性壁条件便可推出:即使管径收窄之后再扩宽,而压强最大值沿管长方向仍然会降低.

参考文献

- [1] 冯元桢.生物力学——运动、流动、压力和生长[M].成都:四川教育出版社,1993.206-219.
- [2] 陈君楷.心血管血流动力学[M].成都:四川教育出版社,1990.1-5.
- [3] 邹盛铨.血流动力学与心血管人工器官[M].成都:成都科技大学出版社,1991.141-142.
- [4] 梅强中.水波动力学[M].北京:科学出版社,1984.279-303.

Nonlinear Waves of Inviscid Fluids in an Elastic Tube

SUN Ming-guang, WU Chun-liang, XU Xiang, ZHAN Jie-min

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The nonlinear waves of inviscid fluids in an elastic tube are studied. The modified Boussinesq equation for bilateral propagation, and modified KdV equation for unilateral propagation are derived for existing convex in the straight tube. The results are obtained by numerical method for modified KdV equation. It is found that the peak of waves decreases after the local convex.

Key words: nonlinear wave; KdV equation; elastic tube; local convex