

守恒密度的符号计算方法及其应用^{*}

范筑军¹, 杨力军², 马东魁³

(1. 华南理工大学电子与信息学院, 广东 广州 510641;

2. 中山大学数学系, 广东 广州 510275;

3. 华南理工大学应用数学系, 广东 广州 510641)

摘要: 文中首先给出了守恒密度的符号计算方法, 然后, 应用守恒密度计算软件, 给出了具有足够多守恒律的高阶 KdV 方程系数的推导方法, 最后, 给出了推导 9 阶 KdV 方程具有一致阶时系数之间关系式的 1 个例子。

关键词: 守恒密度; 符号计算

中图分类号: O175.24 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 02-0008-04

1 守恒密度的计算

首先说明计算 N 阶非线性发展方程系统多项式守恒律的计算方法^[1]。假设发展方程为:

$$u_t = F(u(x, t), u'(x, t), \dots, u^{(n)}(x, t)) \quad (1)$$

其中, $u = [u_1, \dots, u_N]^T$, 将它表示为分量形式, 可得

$$u_{it} + F_i(u_j, u_j', \dots, u_j^{(n)}) = 0, \\ i, j = 1, \dots, N \quad (2)$$

其中, $u_{i,t} = \frac{\partial u_i}{\partial t}$, $u_j^{(n)} = \frac{\partial^n u_j}{\partial x^n}$, u 的所有分量仅依赖于 x, t , $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)^T$ 的所有项必须是多项式的。

假设系统对每个非独立变量 u_i 有 1 个发展方程, 事实上, 存在比方程有更多独立变量的系统, 但总是可以增加发展方程 $u_{i,t} = 0$ 。下面, 分 3 步说明守恒密度的计算方法, 其中用 $u_{j,nx}$ 代替 $u_j^{(n)}$ 。

第 1 步: 在一致阶意义下确定变量和参数的权

可以定义变量的权为: 该变量相当于 x 偏导数的数; 项的阶为: 项中所有关于 x 偏导数的权之和。同时, 假定阶是非负的和有理的。

对于系统 (2), 首先要确定所有变量的权。假定特定方程中所有项都含有相同的阶, 这称为阶的一致性。在系统 (2) 中, 不同的方程可以有不同阶。在定义项中关于 x 偏导数的权后, 可以得到

$$w\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 1, \dots, w\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right) = n$$

其中, w 是返回它的参数权的函数。

本文规定权必须是非负的整数 (除 $\frac{\partial}{\partial x}$ 外, 它

可以是正的、0 或负的)。更确切地说, u_i 的权必须为正的, 参数 q_i 的权必须为非负的。得到 $N + Q + 1$ 个未知数 $\left[w(u_i), w(q_i), w\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]$ 的解。

第 2 步: 构造密度函数形式

进行构造具有预先给定阶 R 的多项式密度。在密度 P 中, 所有项都具有相同的阶 R 。其中阶 R 可以和系统 (2) 中方程的阶不同, 但必须是正整数。由于引入了带权的参数, 密度实际上是一致阶单项的和。

设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_V\}$ 是所有带正的权的变量 (包括参数 P_i , 但不含 $\partial/\partial x$) 的有序列表, 变量按权的逆序排序: $w(v_1)$ 具有最大权, $w(v_V)$ 具有最小权。用于确定 R 阶守恒密度的形式。

第 3 步: 确定密度函数中未知参数

一个守恒律具有如下的形式: $D_t P + D_x J = 0$ 或 $D_t P = -D_x J$, 这意味着 $D_t P$ 必须是函数 J 关于 x 导数的负数。

在计算 $D_t P$ 后, 利用式 (2) 的发展方程, 从表达式 $D_t P$ 中移去所有的 $(u_{i,t})^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, 剩下的表达式为某些表达式关于 x 的全导数, 为验证它, 可以利用欧拉算子。这里要求, 通过合适地选择系数 c_i , 最后 Euler-Lagrange 方程的系数一致地消失。这将产生 1 个关于待定系数 c_i 的线性系统, 这个系统必须是解析的和可以解出待定系数 c_i 的。

最后, 可以通过分部积分, 计算出

$$J = - \int E dx$$

也可以通过守恒密度和对称的一一对应的关系, 可

* 收稿日期: 2001-09-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19771089)

作者简介: 范筑军 (1972-), 男, 博士后; E-mail: zjf@263.net

以求得相应的对称。

2 符号计算方法与 $2n+1$ 阶 KdV 程系数的推导

符号计算主要使用来证明和发现数学定理以及一些理论推导工作，它又称为符号与计算代数、符号代数、符号操作等等。它的正式名称是“计算机代数”，而为实现计算机代数的软件包，叫做“计算机代数系统”。一类是特殊用途的系统，如 20 世纪 60 年代发展起来的做符号积分的程序；另一类是一般用途的系统，如 Mathematica、Maple^[2]。

MathematicaTM 是一个做数学计算的通用系统。Ünal Göktaş 和 Willy Hereman 利用 MathematicaTM 软件，编写了求解非线性发展方程系统守恒密度和对称的符号计算软件，在该软件中，要求将非线性发展方程的符号表达式输入到一个数据文件中，然后该软件调用这个数据文件来进行所要求的符号计算。

这里利用守恒密度计算软件，给出了 $2n+1$ 阶 KdV 方程系数的推导^[3]，对于如下 $2n+1$ 阶 KdV 方程：

$$u_t + a_0 u^n u_x + a_1 u^{n-1} u_{xx} + a_2 u^{n-2} u_x u_{xx} + a_3 u^{n-3} u_x^3 + \cdots + a_K u u_{(2n-1),x} + u_{(2n+1),x} = 0 \quad (3)$$

利用守恒密度计算软件，确定它的系数之间的关系式。由一致阶的关系，有

$$w\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = (2n+1), \quad w(u) = 2$$

由于 KdV 方程具有无穷阶守恒密度，可以得到确定该 KdV 方程系数的方法如下：

对于某一固定的守恒阶 R ，可以得到 1 组关于方程 (3) 系数兼容性条件的关系式，而对于不同的守恒阶，可以得到这样一系列兼容性条件的关系式，解这些关系式，就可以得到方程 (3) 系数的递推关系，对 $2n+1$ ($n > 2$) 阶 KdV 方程，这些系数都是关于某一自由参量的多项式函数，对某一自由参量赋值，可以得到一些特殊的 $(2n+1)$ 阶 KdV 方程。

3 低阶的例子

下面，利用例子具体说明求解过程：

(1) 当 $n=1$ 时，方程 (1) 变为：

$$u_t + A(u^2)_x + u_{xxx} = 0$$

假设该方程具有无穷阶守恒密度，对于各守恒阶 R ，只要 $A \neq 0$ 。都可以求得相应的守恒密度。故 A 可以取任意不等于 0 的数。

(2) 当 $n=2$ 时，方程 (1) 变为：

$$u_t + A_0(u^3)_x + A_1(u^2)_{xx} + u_{xxx} = 0$$
$$u_t + au^2u_x + bu_xu_{xx} + cuu_{xxx} + u_{xxxx} = 0$$

假设该方程具有无穷阶守恒密度，对于守恒阶 R 时，可以求得对应的兼容性条件如下：

$R=2$ 时，无兼容性条件；

$R=4$ 时，兼容性条件为：

$$b-2c=0;$$

$R=6$ 时，兼容性条件为：

$$10a+(b-3c)(2b-c)=0;$$

解以上 2 个方程，可以得到它们的关系式：

$$b=2c, a=3c^2/10;$$

取 $c=10$ ，则

$$b=20, a=30,$$

此时，方程 (1) 为：

$$u_t + 30u^2u_x + 20u_xu_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxx} = 0$$

利用守恒密度软件检验，它具有无穷阶守恒密度。

(3) 当 $n=3$ 时，方程(1) 变为：

$$u_t + A_0(u^4)_x + A_1(u^3)_{xx} + A_2(u^2)_{xxx} + u_{7,x} =$$
$$u_t + au^3u_x + b_1u_x^3 + b_2uu_xu_{xx} + b_3u^2u_{xxx} +$$
$$c_1u_{xx}u_{xxx} + c_2u_xu_{xxxx} + c_3uu_{xxxx} + u_{7,x} = 0$$

假设该方程具有无穷阶守恒密度，对于守恒阶 R 时，可以求得对应的兼容性条件如下：

$R=2$ 时，兼容性条件为：

$$2b_1-b_2+2b_3=0;$$

$R=4$ 时，兼容性条件为：

$$b_1-b_2+3b_3=0,$$

$$c_1-5(c_2-2c_3)=0;$$

$R=6$ 时，兼容性条件为：

$$42a-(2c_2-3c_3)(2b_1-3b_2+12b_3)=0,$$

$$14(b_2-2b_3)-(2c_2-3c_3)(c_1-5c_2+15c_3)=0;$$

$R=8$ 时，兼容性条件为：

$$7(b_2-6b_3)-(2c_2-c_3)(c_2-4c_3)=0,$$

$$c_1-2c_2+c_3=0,$$

$$14(b_1-2b_3)-(2c_2-c_3)(c_2-4c_3)=0,$$

$$147a+(c_2-4c_3)^2$$

$$[49b_3+2(2c_2-c_3)(c_2-4c_3)]=0;$$

解以上 2 个方程，可以得到它们的关系式：

$$c_2=3c_3, c_1=5c_3, b_3=\frac{5c_3^2}{14},$$

$$b_2=4b_3, b_1=b_3, a=\frac{5c_3^3}{98};$$

取 $c_3=14$ ，则

$$c_2=42, c_1=70, b_3=70,$$

$$b_2=280, b_1=70, a=140$$

此时，方程 (1) 为：

$$u_t + 140u^3u_x + 70u_x^3 + 280uu_xu_{xx} + 70u^2u_{xxx} +$$
$$70u_{xx}u_{xxx} + 42u_xu_{xxxx} + 14uu_{xxxx} + u_{7,x} = 0$$

利用守恒密度软件检验，它具有无穷阶守恒密度。

(4) 当 $n = 4$ 时, 方程 (1) 为 9 阶 KdV 方程。

4 9 阶 KdV 孤子方程系数的推导

考虑以下发展方程 (9 阶 KdV 系统) 守恒密度的计算。

$$\begin{aligned} &u_t + au^4u_x + b_1uu_x^3 + b_2u^2u_xu_{xx} + b_3u^3u_{xxx} + \\ &c_1u_xu_{xx}^2 + c_2u_x^2u_{xxx} + c_3uu_{xx}u_{xxx} + c_4uu_xu_{xxx} + \\ &c_5u^2u_{xxx} + d_1u_{xx}u_{xxx} + d_2u_{xx}u_{5x} + d_3u_xu_{6x} + \\ &d_4uu_{7x} + u_{9x} = 0 \end{aligned}$$

其中, $a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, d_1, d_2, d_3, d_4$ 为参数。且记守恒密度为 P , 阶为 $w(P) = R$ 。利用守恒密度计算软件, 可得如下结果。

$$w(u) = 2; w\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 9$$

$R = 2$ 时, $P = u$, 系统应满足如下兼容性条件:

$$b_1 = b_2 - 3b_3$$

$$c_1 = 2c_2 + \frac{c_3}{2} - \frac{5c_4}{2} + 5c_5$$

$R = 4$ 时, $P = u^2$, 系统应满足如下兼容性条件:

$$b_1 = \frac{3b_2}{2} - 6b_3, c_1 = 2c_2 + c_3 - \frac{5c_4}{2} + 15c_5,$$

$$d_1 = 3d_2 - 7d_3 + 14d_4$$

$R = 6$ 时, $P = u^3 + Au_x^2$, 系统应满足如下兼容性条件:

$$243c_1 = 243c_2 + 81c_3 + 324c_4 - 1\,296c_5 +$$

$$70d_3^2 - 665d_3d_4 + 1\,225d_4^2$$

$$9d_2(2d_3 - 5d_4) = 162(c_4 - 3c_5) +$$

$$112d_3^2 - 686d_3d_4 + 1\,015d_4^2$$

.....

$R = 8$ 时, $P = u^4 + Au_x^2 + Bu_{xx}^2$, 系统应满足如下兼容性条件:

$$27d_2(2d_3 - 3d_4) = 162c_3 - 360c_4 +$$

$$360c_5 + 166d_3^2 - 381d_3d_4 + 1\,980d_4^2$$

$$6d_1 = 3d_2 + 23d_3 - 36d_4$$

.....

$R = 10$ 时, $P = u_5 + Au^2u_x^2 + Bu_{xx}^2 + cu_{xxx}^2$, 系统应满足如下兼容性条件:

$$d_3(2d_3 - 11d_4) = 9c_4 - 72c_5 - 5d_4^2$$

$$c_3 = 2(c_4 - c_5)$$

.....

假定该方程具有以上各阶守恒密度, 则所有兼容性条件都必须满足, 解上述方程组可得:

$$b_1 = 3b_3, b_2 = 6b_3$$

$$c_1 = \frac{31c_5}{3}, c_2 = \frac{23c_5}{3}, c_3 = 10c_5, c_4 = 6c_5$$

$$d_1 = 14d_4, d_2 = \frac{28d_4}{3}, d_3 = 4d_4$$

$$c_5 = \frac{7d_4^2}{18}, b_3 = \frac{7d_4^3}{486}, a = \frac{35d_4^4}{5\,832}$$

其中, d_4 为自由变量。

我们可以取 $d_4 = 18$ (这样的取值使得发展方程的所有系数为整数), 将各系数代入发展方程可得:

$$\begin{aligned} &u_t + 630u^4u_x + 1\,260uu_x^3 + 2\,520u^2u_xu_{xx} + \\ &4\,203u^3u_{xxx} + 1\,302u_xu_{xx}^2 + 966u_x^2u_{xxx} + \\ &1\,260uu_{xx}u_{xxx} + 756uu_xu_{xxx} + 126u^2u_{xxx} + \\ &252u_{xx}u_{xxx} + 168u_{xx}u_{5x} + 72u_xu_{6x} + \\ &18uu_{7x} + u_{9x} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

利用守恒密度计算的软件, 可以求得该方程的守恒密度结果如下:

$$w(u) = 2; w\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 9$$

$$R = 2 \text{ 时}, P = u, J = \dots$$

$$R = 4 \text{ 时}, P = u^2, J = \dots$$

$$R = 6 \text{ 时}, P = u^3 - \frac{u_x^2}{2}, J = \dots$$

$$R = 8 \text{ 时}, P = u^4 - 2uu_x^2 + \frac{u_{xx}^2}{5}, J = \dots$$

$$R = 10 \text{ 时}, P = u^5 - 5u^2u_x^2 + uu_{xx}^2 - \frac{u_{xxx}^2}{14},$$

$$J = \dots$$

⋮

存在足够多的守恒律。

再由守恒密度和对称的关系, 令 $u = s_x$, 可以求得以下对称(f):

$$f_2 = 1 \text{ (相应于 } R = 2 \text{ 的守恒密度)}$$

$$f_4 = 2s_x \text{ (相应于 } R = 4 \text{ 的守恒密度)}$$

$$f_6 = 3s_x^2 + s_{xx} \text{ (相应于 } R = 6 \text{ 的守恒密度)}$$

$$f_8 = 4s_x^3 + 6s_{xx}^2 + 4s_xs_{xxx} + 2s_{5x} \text{ (相应于 } R = 8 \text{ 的守恒密度)}$$

$$\begin{aligned} f_{10} = &5s_x^4 + 30s_xs_{xx}^2 + 10s_xs_{xxx} + 3s_{xxx}^2 + 4s_{xx}s_{xxx} + \\ &2s_xs_{5x} + \frac{s_{7x}}{7} \text{ (相应于 } R = 10 \text{ 的守恒密度)} \end{aligned}$$

⋮

方程 (5) 是用计算机辅助分析找到的有无穷多守恒律的 9 阶 KdV 方程。由守恒律与可积性的关系, 它应该是完全可积的, 同时, 它也应该具有孤立子解^[4-6]。

参考文献:

[1] GÖKTAL Ü, HEREMAN W. Symbolic computation of conserved densities for systems of nonlinear evolution equations [J]. Symbolic Computation, 1997; 11: 1-31.
[2] 杨路, 张景中, 侯晓荣. 非线性代数方程组与定理机器

证明[M] . 上海: 上海科技教育出版社, 1996.

版社, 1990.

[3] 范筑军. 符号计算与机器证明在孤立子理论中的应用[D] . 广州: 中山大学, 2000.

[5] 王明亮. 非线性发展方程与孤立子[M] . 兰州: 兰州大学出版社, 1990.

[4] 谷超豪. 孤立子理论与应用[M] . 杭州: 浙江科学技术出版社, 1987.

[6] 郭柏灵, 庞小峰. 孤立子[M] . 北京: 科学出版社, 1987.

Symbolic Computation of Conserved Densities and Its Application

FAN Zhu jun¹, YANG Li jun², MA Dong kui³

- (1. College of Electronics and Information, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China;
2. Department of Mathematics, Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China;
3. Department of Applied Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

Abstract: The symbolic computation method of conserved densities is given. Applied the computation software of conserved densities, the coefficient computation method of KdV equation is presented. And, a sample of ninth order KdV equation is also illustrated.

Key words: conserved densities; symbolic computation

·简 讯·

中山大学一项目获国家自然科学二等奖

2002 年 2 月在北京举行的国家科学技术奖励大会上, 中山大学理工学院许宁生教授主持的科研成果《金刚石及其相关薄膜的场致电子发射特性和机制》获国家自然科学奖二等奖, 这是目前为止中山大学获得的最高科技奖项。

许宁生教授主持的获奖项目包括了材料物理、无机非金属类信息与功能材料、凝聚态物理、真空微电子学 4 个科学技术领域。该项目主要包括 3 个方面的成果:

(1) 发现 CVD 金刚石薄膜在低电场下大面积发射电子的现象, 引发全世界同行全面开展研究金刚石及其相关薄膜场致电子发射特性、物理机制的一系列学术活动。

(2) 系统研究金刚石薄膜的场致电子发射物理机制, 提出了三个在研究领域内有影响的模型。

(3) 推进金刚石薄膜在真空微电子器件上的应用基础研究。

(本刊通讯员)