

强非线性对称振子周期振动的一种解法^{*}

黄^①彪¹, 靳祥鹏², 邹华东¹

(1. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275; 2. 中山大学管理学院, 广东 广州 510275)

摘要: 给出一类强非线性对称振子周期振动的一种解法。此法先将常微分方程的求解问题化为积分方程的求解; 再利用增量法的思想及谐波平衡原理, 将积分问题化为求解谐波项系数的线性代数方程; 最后给出本法的应用。

关键词: 强非线性对称振子; 周期振动; 增量法; 谐波平衡

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 01-0012-03

许多工程技术问题可以归结为形如下式的强非线性对称振子:

$$\ddot{x} + g(x) = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (1)$$

这里,

$$g(-x) = -g(x), f(-x, -\dot{x}) = f(x, \dot{x}) \quad (2)$$

分别是变量的非线性函数, ε 是参数。求解振子 (1) 的较有效的方法有新的渐近法^[1]、椭圆函数法^[2]、频闪法^[3]、推广 LP 法^[4]、增量谐波平衡法 (IHB)^[5] 和摄动增量法 (PI)^[6] 等。本文利用振子 (1) 的对称振动特性, 给出一种称为频率增量法的简便算法。算例表明, 本法精度良好。

1 频率增量法

$$\text{式 (1) 中, } (\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dt}, (\cdot\cdot) = \frac{d^2(\cdot)}{dt^2}$$

设振子 (1) 满足文 [4] 关于周期解的存在条件, 且周期解假设为

$$x = a \cos \varphi, \dot{x} = -a \omega(\varphi) \sin \varphi \quad (3)$$

其中, a 是振幅

$$\omega(\varphi) = \dot{\varphi}, \omega(\varphi + 2\pi) = \omega(\varphi) \quad (4)$$

是瞬时频率。将式 (3) 和 (4) 代入式 (1), 得

$$-a \omega \frac{d}{d\varphi}(\omega \sin \varphi) + g(a \cos \varphi) =$$

$$-\varepsilon a f(a \cos \varphi, -a \omega \sin \varphi) \omega \sin \varphi$$

将 $-a \sin \varphi$ 同乘以上式 2 边并积分, 可得

$$\frac{a^2}{2} (\omega \sin \varphi)^2 = v(a, \varphi) + \varepsilon a^2 \int_0^\varphi F(a, \omega, \theta) d\theta \quad (5)$$

上式中,

$$v(a, \varphi) = U(a) - U(a \cos \varphi) \triangleq a^2 v(a, \varphi) \quad (6)$$

$$F(a, \omega, \varphi) = f(a \cos \varphi, -a \omega \sin \varphi) \omega \sin^2 \varphi \quad (7)$$

$$U(x) = \int_0^\varphi g(y) dy \quad (8)$$

式 (5) 将微分方程 (1) 表示为以相角 φ 为自变量、瞬时频率 $\omega = \omega(\varphi)$ 为未知函数的积分方程。式 (5) 中, 令 $\varphi = 2\pi$ 得

$$\int_0^{2\pi} F(a, \omega, \varphi, \theta) d\theta = 0 \quad (9)$$

联立式 (5) 和式 (9), 原则上可确定振子 (1) 的振动频率 $\omega(\varphi)$ 及振幅 a 。然而精确满足式 (5) 中的 $\omega(\varphi)$ 一般难以寻求。考虑到条件 (2), 给出频率增量法如下:

(1) 先考虑 ε 充分小的情形

此时, 设式 (1) 对应零阶近似解为

$$x = a_0 \cos \varphi, \dot{x} = -a_0 \omega_0 \sin \varphi$$

其中, a_0 和 ω_0 由以下 2 式确定

$$\omega_0(\varphi) = \frac{\sqrt{2v(a_0, \varphi)}}{|\sin \varphi|} \quad (10)$$

$$\int_0^{2\pi} F(a_0, \omega_0, \varphi) d\varphi = 0 \quad (11)$$

设满足式 (1) 的 $\omega(\varphi) = \omega_0(\varphi) + \Delta\omega$, 将式 (5) 在 $\omega_0(\varphi)$ 附近展开为频率增量 $\Delta\omega$ 的 Taylor 级数, 略去 $\Delta\omega$ 的二阶以上的项, 得到线性方程

$$(\omega_0 \sin^2 \varphi) \Delta\omega - \varepsilon_0 \int_0^\varphi \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right) \Delta\omega d\theta =$$

$$-\frac{1}{2} (\omega_0 \sin \varphi)^2 + v(a_0, \varphi) + \varepsilon_0 \int_0^\varphi F(a_0, \omega_0, \theta) d\theta \quad (12)$$

上式中

* 收稿日期: 2001-03-28;

作者简介: 黄^①彪 (1950—), 男, 副教授; E-mail: HCB5025@21cn.com

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial \omega} F(a, \omega, \theta) \Big|_{a=a_0, \omega=\omega_0}$$

为了确定 $\Delta\omega$, 将式 (12) 中的 $\Delta\omega$ 及有关量展开为 Fourier 级数 (取前 m 项) 并利用谐波平衡原理, 得到以频率增量 $\Delta\omega$ 的 Fourier 系数 ΔC_i ($i=0, 2, 4, \dots, 2m$) 和 ΔD_j ($j=0, 2, 4, \dots, 2m$) 为独立变量的线性代数方程组

$$\mathbf{AZ} = \mathbf{R} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{A} = (A_{i,j})$ ($i, j=0, 1, 2, \dots, 2m$) 是 $2m+1$ 阶方阵,

$$\mathbf{Z} = (\Delta C_0, \Delta C_2, \dots, \Delta C_{2m}, \Delta D_1, \Delta D_2, \Delta D_4, \dots, \Delta D_{2m})^T$$

$$\mathbf{R} = (R_0, R_1, \dots, R_{2m})^T$$

是 $2m+1$ 个元素的列阵, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{R}$ 的元素由相关各量的富氏系数确定。

每求解 1 次方程组 (13), 得到 1 组 $\Delta C_{2i}, \Delta D_{2i}$ ($i=0, 1, 2, \dots, m$), 可修改 1 次瞬时频率

$$\omega(\varphi) = \omega_0(\varphi) + \Delta\omega =$$

$$\omega_0(\varphi) + \sum_{i=0}^m (\Delta C_{2i} \cos 2i\varphi + \Delta D_{2i} \sin 2i\varphi)$$

将上式代入式 (9) 可求得 a , 将此步骤求得的 a 和 $\omega(\varphi)$ 作为下一迭代步骤的初值 a_0 和 $\omega_0(\varphi)$ 继续求解, 直至 R_n ($n=0, 1, 2, \dots, 2m$) 小于给定的精度, 便可得到参数 $\epsilon = \epsilon_0$ 时的振幅 a 及瞬时频率 $\omega(\varphi)$ 。

(2) 若参数 ϵ 较大, 一次求解难以收敛, 可先求解 $\epsilon_0 < 1$ (或 ≈ 0) 时的情况, 取 $\epsilon_k = \epsilon_{k-1} + \Delta\epsilon_k$ ($k=0, 1, 2, \dots$), 直至 $\epsilon_k = \epsilon$ 。

2 应用

讨论广义 Van der Pol 振子

$$\ddot{x} + x = \epsilon(1 - 9x^2 + 5x^4) \dot{x} \quad (14)$$

的周期振动。这里,

$$g(x) = x, U(x) = \frac{x^2}{2}, f(x, \dot{x}) = 1 - 9x^2 + 5x^4,$$

有 $g(-x) = -g(x)$, $f(-x, -\dot{x}) = f(x, \dot{x})$, 即系统 (14) 是对称振子。由式 (6), (10) 和 (7) 可得

$$\bar{v}(a, \varphi) = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi, \omega_0(\varphi) = 1$$

$$F(a, \omega, \varphi) = (1 - 9a^2 \cos^2 \varphi + 5a^4 \csc^4 \varphi) \omega(\varphi) \sin^2 \varphi$$

将式 $\omega_0(\varphi) = 1$ 代入式 (11) 求得系统 (14)

的 2 个零阶振幅 $a_0^{(1)} \approx 0.723$, $a_0^{(2)} \approx 1.719$ 。分别以 $a_0^{(1)}, a_0^{(2)}$ 及 $\omega_0(\varphi) = 1$ 为初值, 在式 (14) 中令 $\epsilon = 0$, $\Delta\epsilon_k = 0.5$ ($k=1, 2$), 即取 $\epsilon = 0.5$ 和 1 , $m=20$ 时, 可求得对称振子 (14) 分别有 2 个周期解, 振幅分别为 $a_1^{(1)} = 0.722$, $a_1^{(2)} = 1.753$ 及 $a_2^{(1)} = 0.723$, $a_2^{(2)} = 1.748$ 。瞬时频率

$$\omega_k^{(j)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{m/2} (C_{2i,k}^{(j)} \cos 2i\varphi + D_{2i,k}^{(j)} \sin 2i\varphi) \quad (j, k=1, 2)$$

的系数 $C_{2i,k}^{(j)}$ 和 $D_{2i,k}^{(j)}$ ($i=0, 1, 2, \dots, 10; j, k=1, 2$) 见附表 (此略)。由文 [4] 可知 $a_k^{(1)}$, $\omega_k^{(1)}$ 和 $\omega_k^{(2)}$, $a_k^{(2)}$ ($k=1, 2$) 对应的解分别稳定和不稳定, 其相图与四阶龙格库塔法的比较分别见图 1。

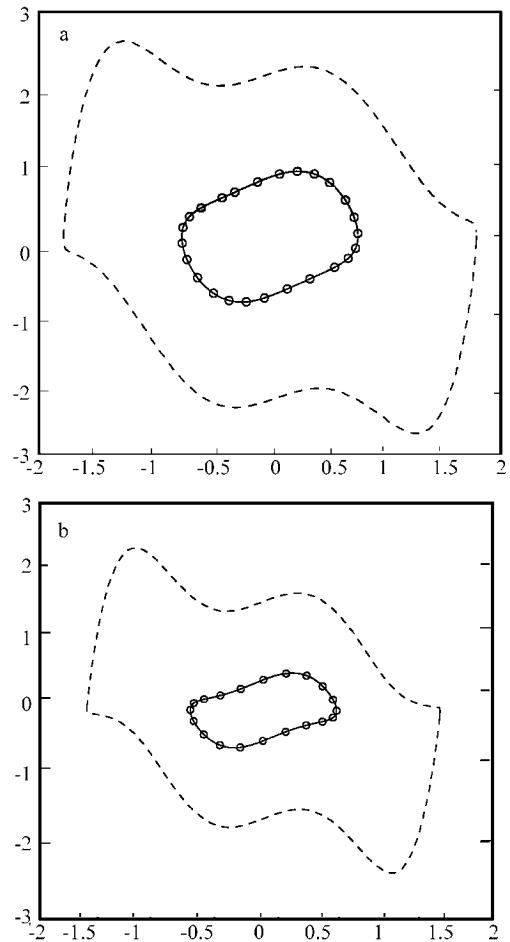


图 1 方程 (14) 的相图

a $\epsilon = 0.5$; b $\epsilon = 1$;

Fig. 1 The phase diagram of equation (14) with $\epsilon = 0.5$

(a) and $\epsilon = 1$ (b)

..... 本法计算的不稳定解 —— 本法计算的稳定解

○ 龙格库塔法

参考文献:

- [1] 徐兆. 非线性力学中一种新的渐近方法[J]. 力学学报, 1985, 17(3): 266— 271.
- [2] 戴世强. 非线性振动系统的渐近解[J]. 中国科学, 1986, 16(1): 34— 40.
- [3] 李骊. 强非线性系统的频闪法[J]. 力学学报, 1990, 22(7): 402— 412.
- [4] 黄 彪. 强非线性动力系统周期分解分析[J]. 应用力学学报, 1994, 11(4): 1— 10.
- [5] LAU S L, CHEUNG Y K. Amplitude incremental vibrational principle for nonlinear vibration of elastic system[J]. AME J Appl Mech, 1981, 48(2): 959— 964.
- [6] CHAN H S Y, CHEUNG K W, XU Z. A perturbation-incremental method for strongly nonlinear oscillators[J]. Int J Non-Linear Mechanics, 1996, 31(1): 59— 72.

A Solution to the Periodic Vibration of Strongly Nonlinear Symmetric Oscillators

HUANG Cheng biao¹, JIN Xiang peng², WU Hua dong¹

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering,

Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China;

2. School of Management, Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A solution to the periodic vibration of strongly nonlinear symmetric oscillators is given. First the ordinary differential equation is transformed into the integral equation. And then the integration equation is transformed into linear algebraic equation, employing the idea of the incremental method and the principle of the harmonic balance. Finally, an application of the present method is given.

Key words: strongly nonlinear symmetric oscillator; periodic vibration; incremental method; harmonic balance