

无界域上具阻尼的 Kdv-Ksv 方程的整体吸引子^{*}

高 平, 赵 怡
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 证明了有阻尼而没有 Marangoni 效应的 Kdv-Ksv 方程在 $\mathbf{R}$ 上存在整体吸引子。

关键词: 整体吸引子; 吸收集; 算子分解; Kdv-Ksv 方程

中图分类号: O175.29 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2002) 01-0005-04

本文考虑具有阻尼的, 没有 Marangoni 效应的 Kdv-Ksv 方程如下:

$$u_t + 2\alpha_1 u u_x + \alpha_2 u_{xx} + \alpha_3 u_{xxx} + \alpha_4 u_{xxx} + \gamma u = f(x) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0 \quad x \in \mathbf{R} (\alpha_i > 0, i = 1, \dots, 4) \quad (2)$$

文 [1] 对该方程在有界区域解的长时间性态进行了深入的研究。本文考虑该系统在无界区域的情况, 将证明问题 (1) 和 (2) 在 $H^2(\mathbf{R})$ 上拥有 1 个整体吸引子。由于 $H^s(\mathbf{R})$ 嵌入 $H^1(s > s^1)$ 是非紧的, 本文利用算子分解技术和 Kuratowski α 测度证明半群 $S(t)$ 的渐近光滑性, 最后用文 [2] 中定理证明整体吸引子的存在。

引进记号: $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$, $\nabla = \partial / \partial x$, $H^s(p) (1 \leq p < \infty)$ 是通常的 Sobolber 空间, $H^s(\mathbf{R}) = H^{s,2}(\mathbf{R})$, $\|\cdot\|, (\cdot, \cdot)$ 分别表示 $L^2(\mathbf{R})$ 中的范数和内积。

1 先验估计及解的存在性

在上面引入的记号下, 问题 (1) 和 (2) 变为

$$u_t + \alpha_4 \Delta^2 u + \alpha_3 \nabla \Delta u + \alpha_2 \Delta u + \alpha_1 \nabla u^2 + \gamma u = f(x) \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0, x \in \mathbf{R} (\alpha_i > 0, i = 1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

引理 1 当 $2\alpha_4 - \alpha_2 > 0, 2\gamma - \alpha_2 - 1 > 0$, 若 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$, $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$ 则

$$u(t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+, L^2(\mathbf{R}))$$

且

$$\|u(t)\|^2 \leq \left[\|u^2\| - \frac{\|f\|}{2\gamma - (\alpha_2 + 1)} \right] \cdot$$

$$\exp\{-[2\gamma - (\alpha_2 + 1)]t\} + \frac{\|f\|^2}{2\gamma - (\alpha_2 + 1)}$$

于是当 $\|u_0\|^2 \leq \rho$ 时, 存在 $t_1(\rho) > 0$, 使得对 $\forall t > t_1(\rho)$, 有

$$\|u(t)\|^2 \leq 1 + \frac{\|f\|^2}{2\gamma - (\alpha_2 + 1)}$$

证明 用 u 与 (3) 式在 $L^2(\mathbf{R})$ 中取内积

$$\frac{1}{2} \partial \|u\|^2 + \alpha_4 \|\Delta u\|^2 + \gamma \|u\|^2 =$$

$$(f(x), u) - \alpha_1 (\nabla u^2, u) - \alpha_2 (\Delta u, u)$$

$$\text{由于 } (\nabla u^2, u) = 0, |(u, \Delta u)| \leq \frac{\|u\|^2 + \|\Delta u\|^2}{2}, |(f, u)| \leq \frac{\|f\|^2 + \|u\|^2}{2},$$

于是 $\partial \|u\|^2 + (2\alpha_4 - \alpha_2) \|\Delta u\|^2 + (2\gamma - \alpha_2 - 1) \|u\|^2 \leq \|f\|^2$, 用 Gronwall 不等式即得引理 1。

引理 2 当 $2\alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_1 > 0, 2\gamma - (\alpha_1 + \alpha_2 + 1) > 0$, 若 $f \in H^1(\mathbf{R})$, $u_0 \in H^1(\mathbf{R})$, 则 $u(t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+, H^1(\mathbf{R}))$ 。进而存在 $t_2(\rho) > 0$, 对 $\forall t \geq t_2(\rho)$, 当 $\|\nabla u_0\|^2 \leq \rho$, 有 $\|\nabla u(t)\| \leq M_1$, (M_1 为常数)。

证明 用 $-\Delta u$ 与 (3) 式作内积, 并注意:

$$\alpha_1 (\nabla u^2, -\Delta u) = \alpha_1 (u^2, \nabla \Delta u) \leq$$

$$\alpha_1 \|u\|_{L^\infty} \|u\| \|\nabla \Delta u\| \leq$$

$$c\alpha_1 \|u\|^{\frac{3}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \Delta u\| \leq$$

$$\frac{\alpha_1}{2} \|\nabla \Delta u\|^2 + c \|u\|^3 \|\Delta u\| \leq$$

$$\frac{\alpha_1}{2} \|\nabla \Delta u\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|\nabla u\|^2 + c_0 \|u\|^6$$

于是

* 收稿日期: 2001-05-23;

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19871094); 广东省自然科学基金资助项目 (990229); 中山大学高等学术研究中心部分资助项目

作者简介: 高平 (1962-), 女, 副教授, 云南曲靖师范学院定向博士生; E-mail: gaoping_205@263.net

$\partial_t \|\nabla u\|^2 + (2\alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_1) \|\nabla \Delta u\|^2 +$
 $(2\gamma - \alpha_2 - \alpha_1 - 1) \|\nabla u\|^2 \leq c_1 + \|\nabla f\|^2$ (5)
 用 Gronwall 不等式, 即得引理 2.

引理 3 当 $2\alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_1 > 0$, $2\gamma - (\alpha_1 + \alpha_2 + 1) > 0$, 若 $f \in H^2(\mathbf{R})$, $u_0 \in H^2(\mathbf{R})$, 则 $u(t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+, H^2(\mathbf{R}))$. 进而有 $t_3(\rho) > 0$, 使对 $\forall t \geq t_3(\rho)$, 当 $\|\Delta u_0\| \leq \rho$, 有 $\|\Delta u(t)\|^2 \leq M_2$, (M_2 为常数).

证明 用 $\Delta^2 u$ 与 (3) 式在 $L^2(\mathbf{R})$ 中取内积,
 $\frac{1}{2} \partial_t \|\Delta u\|^2 + \alpha_4 \|\Delta^2 u\|^2 + \alpha_2(\Delta u, \Delta^2 u) +$
 $\alpha_1(\nabla u^2, \Delta^2 u) + \gamma \|\Delta u\|^2 \leq \|\Delta f\| \|\Delta u\|$
 注意到

$$\begin{aligned} \alpha_1(\nabla u^2, \Delta^2 u) &= 2\alpha_1(u \nabla u, \Delta^2 u) \leq \\ &2\alpha_1 \|u\|_{L^\infty} \|\nabla u\| \|\Delta^2 u\| \leq \\ &c\alpha_1 \|u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{3}{2}} \|\Delta^2 u\| \leq \\ &\frac{\alpha_1}{2} \|\Delta^2 u\|^2 + c_2 \|u\| \|\nabla u\|^3, \end{aligned}$$

$$\alpha_2(\Delta u, \Delta^2 u) \leq \frac{\alpha_2}{2} [\|\Delta u\|^2 + \|\Delta^2 u\|^2]$$

因此, 有

$$\partial_t \|\Delta u\|^2 + (2\alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2) \|\Delta^2 u\|^2 +$$

$$(2\gamma - \alpha_2 - 1) \|\Delta u\|^2 \leq c_3 + \|\Delta f\|^2$$

再用 Gronwall 不等式即得引理 3.

引理 4 在引理 3 的条件下, 对 $\forall t > t_2 + 1$, 有: $\|\nabla \Delta u(t)\|^2 \leq M_3$.

证明 用 $-\Delta^3 u$ 与 (3) 式在 $L^2(\mathbf{R})$ 中取内积,
 $\frac{1}{2} \partial_t \|\nabla \Delta u\|^2 + \alpha_4 \|\nabla \Delta^2 u\|^2 + \gamma \|\nabla \Delta u\|^2 +$
 $\alpha_2(\Delta u, -\Delta^3 u) + \alpha_1(\Delta u^2, \nabla \Delta^2 u) = (\nabla f, \nabla \Delta^2 u)$
 注意到 $\|\alpha_1(\Delta u^2, -\nabla \Delta^2 u)\| \leq$

$$\frac{1}{4} \alpha_1 \|\nabla \Delta^2 u\|^2 + c_4 \|\Delta u^2\|^2,$$

$$|\alpha_2(\Delta u, -\Delta^3 u)| \leq$$

$$\frac{1}{2} \alpha_2 [\|\nabla \Delta^2 u\|^2 + \|\nabla \Delta u\|^2] +$$

$$\|(\nabla f, \nabla \Delta^2 u)\| \leq$$

$$\frac{1}{4} \alpha_1 \|\nabla \Delta^2 u\|^2 + c_5 \|\nabla f\|^2$$

由引理 1 至引理 3 得到 $\|\Delta u^2\|^2 \leq c_6$, 因此

$$\partial_t \|\nabla \Delta u\|^2 + (2\alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2) \|\nabla \Delta^2 u\|^2 +$$

$$(2\gamma - \alpha_2) \|\nabla \Delta u\|^2 \leq c_7 + c_8 \|\nabla f\|^2$$

$$\partial_t \|\nabla \Delta u\|^2 + (2\gamma - \alpha_2) \|\nabla \Delta u\|^2 \leq$$

$$c_7 + c_8 \|\nabla f\|^2 = k_1 \quad (6)$$

由 (5) 式有

$$\partial_t \|\nabla u\|^2 + (2\alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_1) \|\nabla \Delta u\|^2 \leq$$

$$c_1 + \|\nabla f\|^2 = k_2$$

$$(2\alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_1) \int_t^{t+1} \|\nabla \Delta u\|^2 d\tau +$$

$$\|\nabla u(t+1)\|^2 \leq k_2 + \|\nabla u(t)\|^2$$

用引理 2 可得到 $\int_t^{t+1} \|\nabla \Delta u\|^2 d\tau \leq k_3$, 对

(6) 式用一致的 Gronwall 不等式可得到引理 4.

定理 1 若 $2\alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_1 > 0$, $2\gamma - \alpha_2 - \alpha_1 - 1 > 0$, 且 $f(x) \in H^2(\mathbf{R})$, $u_0 \in H^2(\mathbf{R})$, 则 (3) 和 (4) 式存在惟一解 $u(t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+, H^2(\mathbf{R}))$, 进而解算子 $S(t): H^2(\mathbf{R}) \rightarrow H^2(\mathbf{R})$ 连续, 且有有界吸收集 $B \subset H^2(\mathbf{R})$.

由于此证明是用标准方法 (见文 [1]), 因而在此略去.

2 分 解

设 $\hat{q}_{(\eta)} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, 满足 $0 \leq \hat{q}_{(\eta)} \leq 1$, 并且

$$\hat{q}_{(\eta)} = \begin{cases} 1 & \|x\| \leq L \\ 0 & \|x\| \geq 1+L \end{cases}$$

则对任意 $\eta \in (0, 1)$, 存在 $L(\eta) > 0$, 使得

$$\|f - f_\eta\|_{H^2}^2 \leq \eta, f_\eta \stackrel{d}{=} f \circ \hat{q}_{(\eta)}$$

$$\|\nabla u^2 - \nabla u^2 \circ \hat{q}_{(\eta)}\|_{H^1}^2 \leq \eta$$

设 $u_\eta = S_{1\eta}(t) u_0$ 是满足下列问题的解:

$$u_{\eta t} + \alpha_4 \Delta^2 u_\eta + \alpha_3 \nabla \Delta u_\eta + \alpha_2 \Delta u_\eta + r u_\eta =$$

$$f - f_\eta - \alpha_1 \nabla u^2 (1 - \hat{q}_{(\eta)}) \quad (7)$$

$$u_\eta(x, 0) = u_0 \quad (8)$$

则 $v_\eta = S_{2\eta}(t) u_0 = S(t) u_0 - S_{1\eta}(t) u_0$ 满足

$$v_{\eta t} + \alpha_4 \Delta^2 v_\eta + \alpha_3 \nabla \Delta v_\eta + \alpha_2 \Delta v_\eta + r v_\eta =$$

$$f_\eta - \alpha_1 \nabla u^2 \hat{q}_{(\eta)} \quad (9)$$

$$v_\eta(x, 0) = 0 \quad (10)$$

引理 5 在定理 1 的条件下, 存在常数 C_q 使得对任意 $\eta \in (0, 1)$, 分别对 $t > 0$, $t > t^*(\exists t^* > 0)$, 有

$$\|u_\eta\|^2, \|\nabla u_\eta\|^2, \|\Delta u_\eta\|^2, \|\nabla \Delta u_\eta\|^2 \leq C_q$$

$$\|u_\eta\|^2, \|\nabla u_\eta\|^2, \|\Delta u_\eta\|^2, \|\nabla \Delta u_\eta\|^2 \leq C\eta$$

证明 用 u_η 与 (7) 式在 $L^2(\mathbf{R})$ 中取内积,

$$\frac{1}{2} \partial_t \|u_\eta\|^2 + \alpha_4 \|\Delta u_\eta\|^2 + \gamma \|u_\eta\|^2 \leq$$

$$\|f - f_\eta\| \|u_\eta\| + \alpha_1 \|\nabla u^2 (1 - \hat{q}_{(\eta)})\| \circ$$

$$\begin{aligned} & \|u_\eta\| + \alpha_2 \|\Delta u_\eta\| \|u_\eta\| \leq \\ & \|u_\eta\|^2 \frac{b}{2} + \alpha_1 \|u_\eta\|^2 \frac{b}{2} + \\ & \alpha_2 [\|\Delta u_\eta\|^2 + \|u_\eta\|^2] \frac{b}{2} + C\eta, \\ & \partial_t \|u_\eta\|^2 + (2\alpha_4 - \alpha_2) \|\Delta u_\eta\|^2 + \\ & (2\gamma - \alpha_2 - \alpha_1 - 1) \|u_\eta\|^2 \leq C\eta \end{aligned}$$

由此

$$\|u_0\|^2 \exp(-bt) + \frac{C\eta}{b} [1 - \exp(-bt)]$$

其中, $b = 2\gamma - (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)$ 进而 $\|u_\eta\|^2 \leq C_\eta$ 对 $\forall t > 0, \eta \in (0, 1)$

取 $t_1 = t_1(\rho) > 0$, 使得

$$\|u_0\| \exp(-bt) \leq \rho \exp(-bt) < \eta$$

则

$$\|u_\eta\|^2 \leq C_{10} \eta \quad \forall t \geq t_1$$

用 $-\Delta u_\eta$ 与 (7) 式在 $L^2(\mathbf{R})$ 中取内积, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|\nabla u_\eta\|^2 + \alpha_4 \|\nabla \Delta u_\eta\|^2 + \gamma \|\nabla u_\eta\|^2 \leq \\ & \frac{1}{2} \alpha_2 [\|\nabla \Delta u_\eta\|^2 + \|\nabla u_\eta\|^2] + \\ & \frac{1}{2} \|\nabla u_\eta\|^2 + \frac{1}{2} \alpha_1 \|\nabla u_\eta\|^2 + c\eta \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \partial_t \|\nabla u_\eta\|^2 + (2\alpha_4 - \alpha_2) \|\nabla \Delta u_\eta\|^2 + \\ & b \|\nabla u_\eta\|^2 \leq c\eta \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $b = 2\gamma - \alpha_1 - \alpha_2 - 1$

用 Gronwall 不等式, 类似于 (11) 式, 有

$$\|\nabla u_\eta\| \leq C_9, \quad \|\nabla u_\eta\| \leq C_{10},$$

$$\eta \quad \forall t > t_2, \eta \in (0, 1)$$

用 $-\Delta^3 u_\eta$ 与 (7) 式在 $L^2(\mathbf{R})$ 中取内积,

$$\frac{1}{2} \partial_t \|\nabla \Delta u_\eta\|^2 + \alpha_4 \|\nabla \Delta^2 u_\eta\|^2 +$$

$$\gamma \|\nabla \Delta u_\eta\|^2 \leq \frac{\alpha_1}{4} \|\nabla \Delta^2 u_\eta\|^2 + C \|\nabla f -$$

$$\nabla f_\eta\|^2 + \frac{\alpha_1}{4} \|\nabla \Delta^2 u_\eta\|^2 + C \|\Delta u_\eta\|^2 (1 -$$

$$\hat{\mathcal{Q}}_\eta) \|^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 [\|\nabla \Delta u_\eta\|^2 + \|\nabla \Delta^2 u_\eta\|^2]$$

于是

$$\begin{aligned} & \partial_t \|\nabla \Delta u_\eta\|^2 + (2\alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_1) \|\nabla \Delta^2 u_\eta\|^2 + \\ & (2\gamma - \alpha_2) \|\nabla \Delta u_\eta\|^2 \leq C\eta \end{aligned} \quad (13)$$

由 (12) 式得到

$$(2\alpha_4 - \alpha_2) \int_t^{t+1} \|\nabla \Delta u_\eta\|^2 d\tau \leq$$

$$C\eta + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\nabla u_\eta(t)\|^2$$

对 (13) 式用一致的 Gronwall 不等式, 有

$$\|\nabla \Delta u_\eta\| \leq C_{11}$$

为证明空间嵌入的紧性, 引入加权范数

$$\|x v_\eta\|, \|x \nabla v_\eta\|, \|x \Delta v_\eta\|.$$

引理 6 在定理 1 条件下, 存在常数 $\rho_1(\eta), \rho_2(\eta), \rho_3(\eta)$ 使得

$$\|x v_\eta\|^2 \leq \rho_1(\eta), \quad \|x \nabla v_\eta\|^2 \leq$$

$$\rho_2(\eta), \quad \|x \Delta v_\eta\|^2 \leq \rho_3(\eta)$$

证明 用 $x^2 v_\eta$ 与 (9) 式在 $L^2(\mathbf{R})$ 中取内积, 注意到

$$\alpha_4 (\Delta^2 v_\eta, x^2 v_\eta) = \alpha_4 \|x \Delta v_\eta\|^2 +$$

$$4\alpha_4 (\Delta v_\eta, x \nabla v_\eta) - 2\alpha_4 \|\Delta v_\eta\|^2,$$

$$(\nabla \Delta v_\eta, x^2 v_\eta) =$$

$$-(\Delta v_\eta, 2x v_\eta) - (\Delta v_\eta, x^2 \nabla v_\eta) =$$

$$-(\Delta v_\eta, 2x v_\eta) - (v_\eta, x^2 \nabla \Delta v_\eta) -$$

$$(v_\eta, 4x \Delta v_\eta) - (v_\eta, 2 \nabla v_\eta) =$$

$$-6(\Delta v_\eta, x v_\eta) - (\nabla \Delta v_\eta, x^2 v_\eta) - 2(v_\eta, \nabla v_\eta)$$

因而

$$\alpha_3 (\nabla \Delta v_\eta, x^2 v_\eta) =$$

$$-3\alpha_3 (\Delta v_\eta, x v_\eta) - \alpha_3 (v_\eta, \nabla v_\eta)$$

于是

$$\partial_t \|x v_\eta\|^2 \frac{b}{2} + \alpha_4 \|x \Delta v_\eta\|^2 + \gamma \|x v_\eta\|^2 \leq$$

$$\|x v_\eta\|^2 \frac{b}{2} + C_1 \|\nabla \Delta v_\eta\|^2 + 2\alpha_4 \|\nabla v_\eta\|^2 +$$

$$\|x v_\eta\|^2 \frac{b}{2} + C_2 \|\Delta v_\eta\|^2 + \alpha_3 \|v_\eta\| \|\nabla v_\eta\| +$$

$$\alpha_2 [\|x \Delta v_\eta\|^2 + \|x v_\eta\|^2] \frac{b}{2} + C_3 \|x f_\eta\|^2 +$$

$$\|x v_\eta\|^2 \frac{b}{2} + \alpha_1 \|x v_\eta\|^2 \frac{b}{2} + C_4 \|x \nabla u^2 \hat{\mathcal{Q}}_\eta\|^2 \quad (14)$$

注意到 u, u_η 在 $H^3(\mathbf{R})$ 中有界, 因而 v_η 在 $H^3(\mathbf{R})$ 中有界, 又由于 $f_\eta, \nabla u^2 \hat{\mathcal{Q}}_\eta$ 有紧支集, 所以 $\|x f_\eta\|, \|x \nabla u^2 \hat{\mathcal{Q}}_\eta\|$ 有界. 由此, (14) 式变为

$$\partial_t \|x v_\eta\|^2 + (2\alpha_4 - \alpha_2) \|x \Delta v_\eta\|^2 +$$

$$(2\gamma - \alpha_1 - \alpha_2 - 1) \|x v_\eta\|^2 \leq C(\eta)$$

于是 $\|x v_\eta(t)\|^2 \leq \rho_1(\eta), \quad \forall t > 0$

对 (9) 式关于 x 微分, 有

$$\Delta v_{\eta t} + \alpha_4 \Delta^3 v_\eta + \alpha_3 \nabla \Delta^2 v_\eta + \alpha_2 \Delta^2 v_\eta =$$

$$\Delta f_\eta - \alpha_1 \Delta (\nabla u^2 \circ \hat{\mathcal{Q}}_\eta) \quad (15)$$

用 $x^2 \Delta v_\eta$ 与 (15) 式在 $L^2(\mathbf{R})$ 中取内积, 注意到

$$\alpha_4 (\Delta^3 v_\eta, x^2 \Delta v_\eta) = \alpha_4 (\Delta^2 v_\eta, \Delta (x^2 \Delta v_\eta)) =$$

$$\alpha_4 \|x \Delta^2 v_\eta\|^2 + 4\alpha_4 (\Delta^2 v_\eta, x \nabla \Delta v_\eta) -$$

$$2\alpha_4 \|\nabla \Delta v_\eta\|^2, (\nabla \Delta^2 v_\eta, x^2 \Delta v_\eta) =$$

$$-(\Delta^2 v_\eta, x^2 \nabla \Delta v_\eta) - (\Delta^2 v_\eta, 2x \Delta v_\eta) =$$

$$-6(\Delta v_\eta, x \Delta^2 v_\eta) - (\Delta v_\eta, x^2 \nabla \Delta^2 v_\eta) -$$

$$2(\Delta v_\eta, \nabla \Delta v_\eta), \alpha_3 (\nabla \Delta^2 v_\eta, x^2 \Delta v_\eta) =$$

$$-3\alpha_3 (\Delta v_\eta, x \Delta^2 v_\eta) - \alpha_3 (\Delta v_\eta, \nabla \Delta v_\eta) -$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1(\triangle(\nabla u^2 \hat{q}_{(\eta)}), x^2 \triangle v_\eta) = \\ & - \alpha_1(\nabla u^2 \hat{q}_{(\eta)}, x^2 \triangle^2 v_\eta) - \\ & \alpha_1(\nabla u^2 \hat{q}_{(\eta)}, 4x \nabla \triangle v_\eta) - 2\alpha_1(\nabla u^2 \hat{q}_{(\eta)}, \triangle v_\eta) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} & \partial \|x \triangle v_\eta\|^2 \leq \alpha_4 \|x \triangle^2 v_\eta\|^2 + \gamma \|x \triangle v_\eta\|^2 \leq \\ & \alpha_1 \|x \triangle^2 v_\eta\|^2 + C_5 \|\nabla \triangle v_\eta\|^2 + \\ & 2\alpha_4 \|\nabla \triangle v_\eta\|^2 + \alpha_1 \|x \triangle^2 v_\eta\|^2 + \\ & C_6 \|\triangle v_\eta\|^2 + \alpha_3 \|\triangle v_\eta\| \|\nabla \triangle v_\eta\| + \\ & \alpha_2 [\|x \triangle^2 v_\eta\|^2 + \|x \triangle v_\eta\|^2] \leq \\ & \|x \triangle v_\eta\|^2 + C_7 \|x \triangle f_\eta\|^2 + \\ & \alpha_1 \|x \triangle^2 v_\eta\|^2 + C_8 \|x \nabla u^2 \hat{q}_{(\eta)}\|^2 + \\ & 4\alpha_1 \|x \nabla u^2 \hat{q}_{(\eta)}\| \|\nabla \triangle v_\eta\| + \\ & 2\alpha_1 \|\nabla u^2 \hat{q}_{(\eta)}\| \|\triangle v_\eta\| \end{aligned}$$

从而得到

$$\partial \|x \triangle v_\eta\|^2 + (2\alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2) \|x \triangle^2 v_\eta\|^2 + (2\gamma - \alpha_2 - 1) \|x \triangle v_\eta\|^2 \leq C_9(\eta)$$

于是 $\|x \triangle v_\eta\|^2 \leq \rho_3(\eta) \quad \forall t > 0$

而 $\|x \nabla v_\eta\|^2 = \int x^2 \nabla v_\eta \nabla v_\eta dx =$

$$-2 \int x \nabla v_\eta v_\eta dx - \int x^2 \triangle v_\eta v_\eta dx \leq$$

$$2 \|x v_\eta\|^2 + \|x \triangle v_\eta\| \|x v_\eta\| \leq \rho_2(\eta)$$

至此, 引理 6 证毕.

3 整体吸引子的存在性

假若 $f(x) \in H^2(\mathbf{R})$, $S(t)$ 是方程 (1), (2) 生成的解半群, 前面已经证明了 $S(t)$ 在 $H^2(\mathbf{R})$ 中有有界吸收集, 这一部分将利用 Kuratowski α -非紧测度来证明 $\omega(B)$ 的紧性, 并由此得到紧吸引子.

Banach 空间 E 中集合 A 的 α -非紧测度定义为

$$\alpha(A) \stackrel{d}{=} \inf\{d \mid d(A) < d\}$$

其中, $d(A)$ 为 A 的有限覆盖的小球的直径. 由文 [2, 3] 得

$$\alpha(A \cup B) \leq \alpha(A) + \alpha(B); \alpha(A) = 0$$

若 A 在 E 中紧, 下面叙述并证明本文的主要结果.

定理 2 设 $2\alpha_4 > \alpha_1 + \alpha_2$, $2\gamma > \alpha_1 + \alpha_2 + 1$, $f(x) \in H^2(\mathbf{R})$, $S(t)$ 是方程 (1), (2) 生成的解半群. 则 $\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} S(t)B$ 是 $S(t)$ 在 $H^2(\mathbf{R})$ 中的整体吸引子. 其中, 闭包在 $H^2(\mathbf{R})$ 中取, B 是 $S(t)$ 在 $H^2(\mathbf{R})$ 中的有界吸收集.

证明此定理需要下面紧嵌入引理.

引理 7^[4,5] 设 $s > s_1$ 是整数, 则

$$H^s(\mathbf{R}^n) \cap H^{s_1}(\mathbf{R}^n, (1+x^2)dx) \text{ 嵌入 } H^{s_1}(\mathbf{R}^n)$$

是紧的.

定理 2 证明 由引理 6 和引理 7 知道由条件 (9), (10) 所确定的 $S_{2\eta}(t)$ 在 $H^2(\mathbf{R})$ 上紧. $\forall B \subset H^2(\mathbf{R})$ 有界, 有

$$\alpha(S_{2\eta}(t)B) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

使得 $\|S_{1\eta}(t)u_0\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t^*, u_0 \in B$

因此 $\alpha(S(t)B) \leq$

$$\alpha(S_{1\eta}(t)B) + \alpha(S_{2\eta}(t)B) = \alpha(S_{1\eta}(t)B) \leq \epsilon$$

从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(S(t)B) = 0$

即 $S(t)$ 是渐近光滑的. 用文 [2] 中定理, 就可完成定理 2 的证明.

参考文献:

- [1] 夏红强. 具阻尼 Kdv-Ksv 方程的整体吸引子[J]. 应用数学, 1999, 12(1): 31-35.
- [2] HALE J K. Asymptotic behavior of dissipative systems[M]. Math Surveys and Monographs, Providence RI, 1988, 25.
- [3] BABIN A V, VISHIK M I. Attractors of evolution equation [M]. Amsterdam, London, New York, Tokyo: North Holland, 1992.
- [4] GUO B L, LI Y S. Attractor for dissipative Klein-Gordon-Schrodinger equation in $\mathbf{R}^3$ [J]. J Partial Diff Eqs, 1997, 136(2): 356-377.
- [5] BABIN A V, VISHIK M I. Attractors of partial differential evolution equation in an unbounded domain[J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1990, 116A: 221-243.

Global Attractor for Damped Kdv-Ksv Equation in an Unbounded Domain

GAO Ping, ZHAO Yi

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The existence of global attractor for damped Kdv-Ksv equation without Marangoni effect in $\mathbf{R}$ is obtained.

Key words: global attractor; absorbing set; decomposition of operator; Kdv-Ksv equation