

经济计量非线性模型的一个注记^{*}

周先波

(中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

摘要: 在非线性经济计量模型的估计中, 当总体方差 σ^2 较大时, 用参数线性化的逆变换代回而得的估计值不是原模型的参数估计值; 模型中随机扰动的形式会对模型估计产生影响。

关键词: 非线性模型; 参数估计; 回归

中图分类号: O211.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 01-0100-03

在经济计量模型中, 对于参数是非线性的回归模型的参数估计, 一般较为困难。目前常用的方法有: 间接代换法, 直接查找法, 直接优化法和循环线性化法 (或泰勒级数展开法)^[1,2]。但对某些较特殊的非线性模型来说, 若能找到参数的线性化代换, 余下进行线性回归的参数估计, 则问题可以得到简化。但现在的问题是对采用参数线性化后的线性回归的参数估计值用参数逆代换代入求出的值是否就是原参数的估计值呢? 这是做经济计量时常碰到的问题, 人们常用逆代换的代回值作为非线性模型的参数估计值。本文说明, 当总体方差充分小时, 该方法可行; 而对较大方差而言, 这在实践上和理论上都是不妥的。另外, 非线性模型中随机扰动项的设置形式也会直接影响到线性化方法的选择, 方法不当的话, 参数估计的精确度受到影响, 并且在理论上也会出现问题。

本文采用柯布—道格拉斯技术生产函数 $O = AL^\alpha K^\beta$ 来说明上述问题, 其中 O 表示净产值, L 表示劳动力人数, K 表示资本总额, A (技术因子) 和 α, β 均为参数。这里采用的经济计量模型有3种形式:

$$O = AL^\alpha K^\beta e^\epsilon; O = AL^\alpha K^\beta \epsilon; O = AL^\alpha K^\beta + \epsilon$$

1 模型 $O = AL^\alpha K^\beta e^\epsilon$ 的估计

假设随机扰动项 ϵ 服从均值 0, 方差 $\sigma^2 (\neq 0)$ 的正态分布, 该模型的估计为 $O = AL^\alpha K^\beta$, 应用普通最小二乘法, 求估计量 A, α, β , 使残差平方和

$$\sum e_i^2 = \sum (O_i - AL_i^\alpha K_i^\beta)^2$$

最小。利用一阶条件, 经计算可知估计量 A, α, β

应满足如下关系:

$$A = \frac{\sum O L_i^\alpha K_i^\beta}{\sum L_i^{2\alpha} K_i^{2\beta}} = \frac{\sum O L_i^\alpha K_i^\beta \ln L_i}{\sum L_i^{2\alpha} K_i^{2\beta} \ln L_i} = \frac{\sum O L_i^\alpha K_i^\beta \ln K_i}{\sum L_i^{2\alpha} K_i^{2\beta} \ln K_i} \quad (1)$$

但这是一个非线性方程组, 一般无法求解。另外, 对具有该随机扰动形式的模型不可使用循环线性化方法估计参数。现对 $O = AL^\alpha K^\beta e^\epsilon$ 两边取对数, 得模型:

$$\ln O = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K + \epsilon$$

它关于 α, β 是线性的, 而关于 A 仍为非线性的, 故对此模型无法用单纯的变量线性化方法估计。

在实践中, 人们常用参数 b_0 代替 $\ln A$, 即作参数变换 $A = e^{b_0}$, 得到关于参数线性的模型:

$$\ln O = b_0 + \alpha \ln L + \beta \ln K + \epsilon$$

再作变量线性化替换

$$Y_i = \ln O_i, X_{1i} = \ln L_i, X_{2i} = \ln K_i$$

则得关于变量及参数均为线性的模型:

$$Y_i = b_0 + \alpha X_{1i} + \beta X_{2i} + \epsilon$$

设 b_0, α, β 的估计量分别为 $\hat{b}_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$, 则该模型的估计方程为:

$$Y_i = \hat{b}_0 + \hat{\alpha} X_{1i} + \hat{\beta} X_{2i}$$

注意, 本文用参数上加 “ ” 表示该参数的估计。由线性回归的普通最小二乘法, 经计算得

* 收稿日期: 2001-01-06;

基金项目: 广东省高校人文社科研究项目 (01SJA790001)

作者简介: 周先波 (1965—), 男, 副教授; E-mail: zhouxianbo@163.net

$$\begin{cases} b_1 = \frac{(\sum x_{1i}y_i)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{2i}y_i)(\sum x_{1i}x_{2i})}{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} \\ b_2 = \frac{(\sum x_{2i}y_i)(\sum x_{1i}^2) - (\sum x_{1i}y_i)(\sum x_{1i}x_{2i})}{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} \\ b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X}_1 - b_2\bar{X}_2 \end{cases}$$

其中诸小写字母表示相应大写字母的离差, 如 $x_{1i} = X_{1i} - \bar{X}_1$, 而 $\bar{X}_1 = \sum X_{1i} / n$. 估计出 b_0, b_1, b_2 后, 再用参数变换的逆求出: $A = e^{b_0}, \alpha = b_1, \beta = b_2$. 以此分别作为 A, α, β 的近似估计值. 一般地, 当总体方差 σ^2 非常小时, 这种近似估计的效果比较好. 下说明之.

我们知道, 样本回归方程是用来估计总体回归方程的, 而后者反映的是因变量的平均状态 (或称总体条件期望) 随解释变量 X 变化的规律, 故用普通最小二乘法得到的样本回归模型也是反映因变量的平均水平. 记住这一点, 分别计算非线性模型和线性化后的线性模型的条件数学期望:

$$E(O |_{L_i, K_i}) = AL_i^\alpha K_i^\beta E(e^{\epsilon_i}) = AL_i^\alpha K_i^\beta e^{\sigma^2/2},$$

$$E(\ln O |_{L_i, K_i}) = E(\ln A + \alpha \ln L_i + \beta \ln K_i + \epsilon) = \ln A + \alpha \ln L_i + \beta \ln K_i$$

当用参数和变量线性化后模型的参数估计值 $b_0 = (\ln A), \alpha, \beta$ 在参数逆变换中代入时, 实际上是在用线性化后模型中因变量的平均水平代入, 即

$$\bar{O}_i = \exp(E(\ln O |_{L_i, K_i})) = AL_i^\alpha K_i^\beta$$

而把它当作了非线性模型中因变量的平均水平, 即让 $\bar{O}_i = E(O |_{L_i, K_i})$ 或 $AL_i^\alpha K_i^\beta e^{\sigma^2/2} = AL_i^\alpha K_i^\beta$, 从而 $e^{\sigma^2/2} = 1$, 在 $\sigma \neq 0$ 时, 这是不可能的.

由此可见, 只有当方差 σ^2 充分小时, 以这种参数的逆变换替代来求参数近似值才趋于合理. 当方差较大时, 不可用参数线性化后模型的参数估计值在参数逆变换中代入作为原参数的估计值. 我们解决该问题的办法是: 对模型 $Y = \ln A + \alpha X_1 + \beta X_2 + \epsilon$ 应用循环线性化方法, 直接得参数估计值. 因其非线性表现在 $\ln A$ 上, 非线性的程度不是很高, 适当选取初始参数, 可望有限步循环线性回归即收敛.

下面用例子说明上述线性化后的参数估计的逆变换并不是原参数值, 数据来源于文 [3] 表 4-3. 对上述数据施以对数变换: $Y_i = \ln O_i, X_{1i} = \ln L_i, X_{2i} = \ln K_i$. 再对 Y_i 关于 X_{1i}, X_{2i} 进行线性回归

得:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i}$$

其中

$$b_0 = 2.349\,709\,2, b_1 = 0.246\,506\,7, b_2 = 0.295\,421\,7$$

由逆变换得

$$A = e^{b_0} = 10.482\,52, \alpha = b_1 = 0.246\,506\,7,$$

$$\beta = b_2 = 0.295\,421\,7 \quad (2)$$

但用上述数据代入 (1) 中的各式, 等式并不成立:

$$10.482\,52 \neq 10.495\,41 \neq 10.495\,52 \neq 10.497\,19$$

当然, 这也可能由舍入误差造成, 若方差 σ^2 很小, 总的说来它们相差甚微. 在实践中, 人们用式 (2) 估计 α, β, A 的直接依据可能源于此. 但在理论上, 用线性化模型的线性回归计算出系数后, 用逆变换的值作为原非线性模型中对应参数的估计值是不妥的.

当对回归方程:

$$\ln O = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K + \epsilon$$

施以初始参数为 $(A^0, \alpha^0, \beta^0) = (1, 0.2, 0.3)$ 的非线性回归时, 10 次即达到收敛, A, α, β 的估计值分别为

$$A = 10.481\,525, \alpha = 0.246\,527\,6,$$

$$\beta = 0.295\,418\,9 \quad (3)$$

可见, 这与前面的代换而计算的近似值 (2) 是很接近的.

2 模型 $O = AL^\alpha K^\beta \epsilon$ 的估计

此处假设 $\ln \epsilon$ 服从正态分布, 即 ϵ 服从对数正态分布. 当两边取对数后, 该模型完全化为上一模型情形, 故在随机项的这种假定下, 1 和 2 两种模型是等价的.

3 模型 $O = AL^\alpha K^\beta + \epsilon$ 的估计

这里假设 ϵ 服从均值为 0, 方差为 σ^2 的正态分布. 它是一个本质上非线性的模型 (不可线性化), 其估计方程是 $O = AL^\alpha K^\beta$, 同第 1 种模型, 其最小二乘参数估计量间应满足关系式 (1), 同样无法求解. 但因其随机项的特殊性, 可直接应用循环线性化的非线性回归方法. 仍以上面数据为例进行数据处理. 设置初始参数为 0, 0.1, 0.3, 进行非线性回归, 得 A, α, β 的估计值分别为

$$A = 13.532\,304, \alpha = 0.183\,195\,3,$$

$$\beta = 0.309\,461\,3 \quad (4)$$

可见, 估计式值 (4) 与第 1 种模型的估计值 (2) 或 (3) 相比还是“相差甚远”的. 可见, 模型中随机扰动的设定形式会直接关系到参数估计的精确性.

实例 考察我国 1975—1984 年间工业总产值 O 、国营工业企业职工人数 L 、国营工业企业固定资产及流动资金 K 的模型, 数据见文[3] 表 4—6。以此进一步说明, 以参数线性化模型线性回归估计值的参数逆代换值作为原非线性模型中对应参数的估计值是不妥的; 并且, 随机扰动的设定形式对参数估计的影响较大。

(1) 设定模型为 $O = AL^\alpha K^\beta e^\epsilon$, 对该方程两边取对数得: $\ln O = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K + \epsilon$, 在这种设定形式下, 利用上述数据估计 A, α, β 有 2 种做法: 方法一是把 $\ln A$ 看成一个整体, 作参数 b_0 , 将 $\ln O$ 关于 $\ln L$ 和 $\ln K$ 进行线性回归, 得参数估计 $b_0 = 2.689\ 650\ 3, \hat{\alpha} = -0.979\ 394\ 8, \hat{\beta} = 1.628\ 020\ 1$, 用参数逆代换 $A = e^{b_0}$ 代回求出 A, α, β 的估计值分别为

$$\begin{aligned} A &= 14.726\ 530, \hat{\alpha} = -0.979\ 394\ 8, \\ \hat{\beta} &= 1.628\ 020\ 1 \end{aligned} \quad (5)$$

方法二是直接对

$$\ln O = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K + \epsilon$$

应用初始参数为 10, 1.5, -1 的循环线性化方法(2 次即收敛), 得 A, α, β 的估计值分别为

$$\begin{aligned} A &= 10.207\ 220, \hat{\alpha} = -0.899\ 718\ 9, \\ \hat{\beta} &= 1.595\ 038\ 2 \end{aligned} \quad (6)$$

可见, 先用线性回归再用参数逆代换得到的估计值(5)与直接用循环线性化方法得到的估计值(6)相差较多(σ^2 较大)。请对照: 另组数据得到的估计值(2)和(3)相差甚微(因 σ^2 较小)。

(2) 设定模型为 $O = AL^\alpha K^\beta + \epsilon$, 对数据直接施以初始参数为 10, 1.5, -1 的循环线性化非线性回归(6 次即收敛), 得 A, α, β 的估计分别为

$$\begin{aligned} A &= 10.173\ 133, \hat{\alpha} = -0.899\ 691\ 5, \\ \hat{\beta} &= 1.595\ 356\ 2 \end{aligned} \quad (7)$$

比较估计值(5), (6)和(7), 可见模型中扰动项的设置形式影响参数值的估计。

参考文献:

- [1] GUJARATI D N. Basic econometrics [M]. 3rd ed. New York: McGraw Hill, 1995.
- [2] 平狄克 R S, 鲁宾费尔德 D L. 计量经济模型与经济预测 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1999.
- [3] 李长风. 经济计量学 [M]. 上海: 上海财经大学出版社, 1996.

A Note about Nonlinear Econometric Models

ZHOU Xian bo

(Lingnan College, Sun Yat-sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: For the problem of estimation of nonlinear econometric models, when the principle variance σ^2 is relatively large, the estimates from the inverse transformation of the parameter linearization aren't the estimated value of the original parameters. The prescribed form of the stochastic disturbance could affect the estimation of the model.

Key words: nonlinear models; parameter estimates; regression