

高阶非线性微分方程的振动准则^{*}

王其如, 朱思铭
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 利用广义 Riccati 技巧、积分平均与完全平方技巧以及微分不等式理论, 讨论了一类高阶非线性微分方程的振动性并得到一些新的振动准则。

关键词: 高阶微分方程; 非线性; 振动性; 广义 Riccati 技巧

中图分类号: O175.12; O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 04-0006-05

考虑具有阻尼项的 n 阶非线性微分方程

$$x^{(n)}(t) + p(t)x^{(n-1)}(t) + f(t, x[\tau_{01}(t)], \dots, x[\tau_{0m}(t)], \dots, x^{(n-1)}[\tau_{n-1,1}(t)], \dots, x^{(n-1)}[\tau_{n-1,m}(t)]) = 0 \quad (1)$$

其中, n 为偶数, $t \geq t_0$, 且满足下面 3 个条件:

- 1) $p \in C(I, \mathbf{R}_0)$ 且对每个 $t \geq t_0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^s \exp\left(-\int_t^s p(\tau) d\tau\right) ds = \infty$, 其中, $I = [t_0, \infty)$, $\mathbf{R}_0 = [0, \infty)$;
- 2) 函数 $\tau_{ki} \in C(I, \mathbf{R})$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{0i}(t) = \infty$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $i = 1, 2, \dots, m$;
- 3) 函数 $f \in C(I \times \mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{R})$ 满足下列估计

$$f(t, x_{01}, \dots, x_{0m}, \dots, x_{n-1,1}, \dots, x_{n-1,m}) \operatorname{sgn} x_{01} \geq q(t) \prod_{i=1}^m |x_{0i}|^{\alpha_i},$$
$$\text{对 } x_{0i}x_{01} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

其中, $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是非负常数, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, $q \in C(I, \mathbf{R}_0)$ 且 $q(t)$ 在任意区间 $[t^*, \infty)$ 上不恒等于零。

以下总假设方程(1)的解 $x(t)$ 可延拓到整个右半轴且不最终恒为零, 即 $x(t)$ 在某个 $[T_x, \infty)$ 上定义且对每个 $T \geq T_x$ 满足 $\sup_{t \geq T} |x(t)| > 0$ 。方程(1)的这样一个解如果具有任意大的零点, 则称之为振动的; 如果它最终为正或最终为负, 则称之为非振动的。

方程(1)及其特殊情形如二阶非线性常微分方程

$$x''(t) + p(t)f(x(t))g(x'(t)) = 0$$

等的振动性问题, 多年来得到许多专家学者的一直关注, 也取得了一系列好的结果^[1-7]。文[1]假设 1) 和 2) 满足, 且 3) 被替代为

- 3') 函数 $f \in C(I \times \mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{R})$ 满足下列估计

$$f(t, x_{01}, \dots, x_{0m}, \dots, x_{n-1,1}, \dots, x_{n-1,m}) \operatorname{sgn} x_{01} \geq q(t) \sum_{i=1}^m \alpha_i |x_{0i}|,$$
$$\text{对 } x_{0i}x_{01} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

其中, $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是非负常数, $\sum_{i=1}^m \alpha_i > 0$, $q \in C(I, \mathbf{R}_0)$ 且 $q(t)$ 在任意区间 $[t^*, \infty)$ 上不恒等于零, 并研究了方程(1)的解的振动性。很明显, 条件 3) 和 3') 不同, 它们所反映的方程(1)的类型也不同, 而且在讨论中所使用的技巧也有所区别。因此这样进一步的研究有意义, 得到的振动准则也是新的。

本文利用广义 Riccati 技巧、积分平均与完全平方技巧以及微分不等式理论, 进一步讨论了高阶非线性微分方程(1)的振动性, 给出不同于文[1]的新的振动准则, 并就二阶的情形得到了更为有效的判别准则。

* 收稿日期: 2001-11-27

基金项目: 中国博士后科学基金资助项目 (2002031294); 国家自然科学基金资助项目 (10071097)

作者简介: 王其如 (1965-), 男, 副教授, 博士, 博士后; E-mail: wangqr168@263.net

1 基本引理

下面 3 个引理将在本文定理的证明中用到。第 1 个引理是著名的 Kiguradze 引理; 第 2 个可参见文[1] 或 [2]; 第 3 个可类似文[3] 中的引理 3 证得。

引理 1 假设 u 是区间 $[t_0, \infty)$ 上的一个正的、 n 次可微函数, 若 $u^{(n)}$ 常号且在任意区间 $[t^*, \infty)$ 上不恒等于零, 则存在 $t_4 \geq t_0$ 和整数 $l, 0 \leq l \leq n$ 满足 $u^{(n)}$ 非负时 $n+l$ 为偶数或 $u^{(n)}$ 非正时 $n+l$ 为奇数, 且使得由 $l > 0$ 可推出 $u^{(k)}(t) > 0, t \geq t_4 (k = 0, 1, \dots, l-1)$, 而由 $l \leq n-1$ 可推出 $(-1)^{l+k} u^{(k)}(t) > 0, t \geq t_4 (k = l, l+1, \dots, n-1)$ 。

引理 2 如果函数 u 如引理 1 所设且对每一个 $t \geq t_u, u^{(n-1)}(t) u^{(n)}(t) \leq 0$, 则对每一个 $\lambda, 0 < \lambda < 1$,

$$u(\lambda t) \geq \frac{2^{1-n}}{(n-1)!} \left[\frac{1}{2} - \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| \right]^{n-1} t^{n-1} |u^{(n-1)}(t)|$$

对所有充分大的 t 成立。

引理 3 假设条件 1) — 3) 被满足。若 $x(t)$ 为方程 (1) 的一非振动解, 则对所有充分大的 t

$$x(t) x^{(n-1)}(t) > 0$$

2 主要结论及其证明

记 $D_0 = \{(t, s): t > s \geq t_0\}, D = \{(t, s): t \geq s \geq t_0\}$ 。函数 $H \in C(D, \mathbf{R})$ 称做属于 $\mathcal{H}$, 如果它满足:

4) 对所有 $t \geq t_0, H(t, t) = 0$, 在 D_0 上, $H(t, s) > 0$;

5) 在 D_0 上, $H(t, s)$ 对 s 有连续且非正的偏导数。

定理 1 在方程 (1) 中, 假设 1) — 3) 成立且

6) 存在函数 $\sigma(t) \in C(I, \mathbf{R})$ 使得 $\sigma(t) \leq \min_{i \in J} \{t, \tau_{0i}(t)\}, \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty, \sigma(t)$ 可微且 $\sigma'(t) > 0, t \geq t_0$,

其中 $J = \{i: \alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, m\}$ 。

另设存在函数 $H \in \mathcal{H}, h \in C(D_0, \mathbf{R}), k, a \in C^1(I, \mathbf{R}_+)$ 满足

$$-\frac{\partial}{\partial s}(H(t, s)k(s)) + H(t, s)k(s) \left[p(s) - \frac{a'(s)}{a(s)} \right] = \\ h(t, s) \sqrt{H(t, s)k(s)}, \quad (t, s) \in D_0$$

若存在一常数 $\lambda \in (0, 1)$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left\{ H(t, s)k(s)a(s)q(s) - \frac{1}{4\lambda M(n, \lambda)} \frac{a(s)}{\sigma^{n-2}(s)\sigma'(s)} h^2(t, s) \right\} ds = \infty \quad (2)$$

其中, $\mathbf{R}_+ = (0, \infty), M(n, \lambda) = \frac{2^{2-n}}{(n-2)!} \left[\frac{1}{2} - \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| \right]^{n-2}$, 则方程 (1) 的所有解都是振动的。

证明 若方程 (1) 有一非振动解 $x(t)$, 不妨设存在充分大的 $t_1 \geq t_0$ 使得在 $[t_1, \infty)$ 上, $x(t) > 0$ (若 $x(t)$ 最终为负, 可类似证之)。由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{0i}(t) = \infty$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$, 则存在 $t_2 \geq t_1$ 使得 $\tau_{0i}(t) \geq t_1, \sigma(t) \geq t_1, t \geq t_2, i = 1, 2, \dots, m$ 。因此 $x(\tau_{0i}(t)) > 0, x(\sigma(t)) > 0, t \geq t_2, i = 1, 2, \dots, m$ 。由引理 3 可知, 存在 $t_3 \geq t_2$ 使得对所有 $t \geq t_3, x^{(n-1)}(t) > 0$ 。再由方程 (1), 可得对所有 $t \geq t_3$

$$x^{(n)}(t) \leq 0$$

因为在 $[t^*, \infty)$ 上 $q(t) \neq 0$, 所以 $x^{(n)}(t)$ 也有此性质。注意到在区间 $[t_3, \infty)$ 上, 引理 1 的条件满足, 故存在 $t_4 \geq t_3$ 使得对所有 $t \geq t_4, x'(t) > 0$ 且 $x^{(n-1)}(t) > 0$ 。

应用引理 2, 取 $u = x'$, 则存在 $t_5 \geq t_4$ 使得

$$x'[\lambda \sigma(t)] \geq \frac{2^{2-n}}{(n-2)!} \left[\frac{1}{2} - \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| \right]^{n-2} \sigma^{n-2}(t) x^{(n-1)}[\sigma(t)] \geq M(n, \lambda) \sigma^{n-2}(t) x^{(n-1)}(t) \quad (3)$$

对 $\lambda \in (0, 1), t \geq t_5$ 成立。令

$$v(t) = \frac{a(t)x^{(n-1)}(t)}{x[\lambda \sigma(t)]} \quad (4)$$

由于 $x[\lambda \sigma(t)] \leq x[\tau_{0i}(t)] (i \in J)$, 求导 (4) 且利用 (1) 和 (3), 可得对所有 $t \geq t_5$

$$v'(t) \leq -a(t)q(t) \frac{\prod_{i=1}^m |x[\tau_{0i}(t)]|^{\alpha_i}}{x[\lambda\sigma(t)]} - \left\{ p(t) - \frac{a'(t)}{a(t)} \right\} v(t) - \frac{v(t)}{x[\lambda\sigma(t)]} x'[\lambda\sigma(t)] \lambda\sigma'(t) \leq \\ -a(t)q(t) - \left\{ p(t) - \frac{a'(t)}{a(t)} \right\} v(t) - \lambda M(n, \lambda) \sigma^{n-2}(t) \sigma'(t) \frac{v^2(t)}{a(t)}$$

于是对所有 $t \geq t_5$

$$\int_{t_5}^t H(t, s) k(s) a(s) q(s) ds \leq - \int_{t_5}^t H(t, s) k(s) v'(s) ds - \\ \int_{t_5}^t H(t, s) k(s) \left\{ p(s) - \frac{a'(s)}{a(s)} \right\} v(s) ds - \lambda M(n, \lambda) \int_{t_5}^t H(t, s) k(s) \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s) \frac{v^2(s)}{a(s)} ds = \\ H(t, t_5) k(t_5) v(t_5) - \int_{t_5}^t h(t, s) \sqrt{H(t, s) k(s)} v(s) ds - \lambda M(n, \lambda) \int_{t_5}^t H(t, s) k(s) \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s) \frac{v^2(s)}{a(s)} ds = \\ H(t, t_5) k(t_5) v(t_5) + \frac{1}{4\lambda M(n, \lambda)} \int_{t_5}^t \frac{a(s)}{\sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)} h^2(t, s) ds - \\ \int_{t_5}^t \left\{ \left[\lambda M(n, \lambda) \frac{\sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)}{a(s)} H(t, s) k(s) \right]^{1/2} v(s) + \frac{1}{2} \left[\lambda M(n, \lambda) \frac{\sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)}{a(s)} \right]^{-1/2} h(t, s) \right\}^2 ds$$

因而, 对所有 $t \geq t_5$

$$\int_{t_5}^t \left[H(t, s) k(s) a(s) q(s) - \frac{1}{4\lambda M(n, \lambda)} \frac{a(s)}{\sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)} h^2(t, s) \right] ds \leq \\ H(t, t_5) k(t_5) v(t_5) \leq H(t, t_0) k(t_5) v(t_5)$$

进而有

$$\int_{t_0}^t \left[H(t, s) k(s) a(s) q(s) - \frac{1}{4\lambda M(n, \lambda)} \frac{a(s)}{\sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)} h^2(t, s) \right] ds = \\ \left[\int_{t_0}^{t_5} + \int_{t_5}^t \right] \left[H(t, s) k(s) a(s) q(s) - \frac{1}{4\lambda M(n, \lambda)} \frac{a(s)}{\sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)} h^2(t, s) \right] ds \leq \\ H(t, t_0) \int_{t_0}^{t_5} k(s) a(s) q(s) ds + H(t, t_0) k(t_5) v(t_5)$$

因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left\{ H(t, s) k(s) a(s) q(s) - \frac{1}{4\lambda M(n, \lambda)} \frac{a(s)}{\sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)} h^2(t, s) \right\} ds \leq \\ \int_{t_0}^{t_5} k(s) a(s) q(s) ds + k(t_5) v(t_5) < \infty$$

此与 (2) 相矛盾。定理 1 证毕。

推论 1 若定理 1 中的条件 (2) 被替换为

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) k(s) a(s) p(s) ds = \infty$$

和

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \frac{a(s)}{\sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)} h^2(t, s) ds < \infty$$

则方程 (1) 的所有解都是振动的。

当 $n=2$ 时, 可以得到比条件 (2) 更为有效的条件。

定理 2 在方程 (1) 中, 令 $n=2$ 。假设条件 1) - 3) 和 6) 成立, 且函数 H, h, k 和 a 如定理 1 所给。若

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left\{ H(t, s) k(s) a(s) q(s) - \frac{1}{4} \frac{a(s)}{\sigma'(s)} h^2(t, s) \right\} ds = \infty \quad (5)$$

则方程 (1) 的所有解都是振动的。

证明 不失一般性, 假设存在充分大的 $t_1 \geq t_0$ 使得在 $[t_1, \infty)$ 上, $x(t) > 0$ 。类似于定理 1 的证明可知,

存在 $t_2 \geq t_1$ 使得对所有 $t \geq t_2$, $x'(t) > 0$, $x''(t) \leq 0$, $t \geq t_2$ 。令

$$v(t) = \frac{a(t) x'(t)}{x[\sigma(t)]} \quad (6)$$

求导(6) 且由方程(1) ($n = 2$) 和 $x'(t) \leq x'(\sigma(t))$, 可得对所有 $t \geq t_0$

$$v'(t) \leq -a(t)q(t) - \left[p(t) - \frac{a'(t)}{a(t)} \right] v(t) - \frac{v^2(t)}{a(t)} \sigma'(t)$$

余下的部分类似于定理 1 可证, 故略。定理 2 证毕。

推论 2 若定理 2 中的条件 (5) 被替换为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) k(s) a(s) p(s) ds = \infty$$

和

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \frac{a(s)}{\sigma'(s)} h^2(t, s) ds < \infty$$

则方程 (1) 的所有解都是振动的。

注 1 在上面定理和推论的条件 6) 中, $\sigma(t)$ 是可行的。例如, $\sigma(t)$ 可选取 $\inf_{s \geq t} \left\{ \min_{i \in J} [s, \tau_{0i}(s)] \right\}$ 或 $\inf_{s \geq t} \left\{ \min_{i \in m} [s, \tau_{0i}(s)] \right\}$ 等。

注 2 上面定理 2 改进并推广了 Rogovchenko^[4] 和 Wang^[5] 中的定理 1 与 2。

注 3 本文没有要求方程 (1) 中的函数 $\tau_{ki}(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1, i = 1, 2, \dots, m$) 是滞后的、超前的或是混合型的。因此, 上面的定理和推论可对常微分方程、时滞微分方程、超前型微分方程或是混合型微分方程成立。

通过适当选取函数 $H(t, s)$ 和 $k(s)$, 根据上面的定理和推论, 可以给出方程(1) 的一系列具体的振动准则。例如, 可选取 $H(t, s) = (t-s)^m$, $H(t, s) = \left[\ln \frac{t}{s} \right]^m$, $H(t, s) = \left[\int_s^t \frac{dz}{\theta(z)} \right]^m$, 或 $H(t, s) = \rho(t-s)$ 等, $t \geq s \geq t_0$; $k(s)$ 可以选取 1, s 等, 其中 $m > 1$ 是常数, $t \geq t_0$, $\theta \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$ 满足 $\int_{t_0}^{\infty} \frac{dz}{\theta(z)} = \infty$, $\rho \in C([0, \infty), \mathbf{R})$, $\rho(0) = 0$, 对 $u > 0$, $\rho(u) > 0$ 且 $\rho'(u) \geq 0$ 。

下面用例子来说明本文准则的应用。

例 对任意偶数 n , 考虑 n 阶非线性微分方程

$$x^{(n)}(t) + p(t)x^{(n-1)}(t) + q(t)x^{1/2}(t-\tau)x^{1/2}(t-\sigma) = 0 \quad (7)$$

其中, τ 和 σ 是任意实常数, $0 \leq p(t) \leq \lambda t^{-1}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $t \geq t_0 = \max\{1, 1 + \max\{\tau, \sigma\}\}$ 。记 $a(t) = \exp\left[\int_{t_0}^t p(u) du\right]$, 则 $a(t) \leq t_0^{-\lambda} t^\lambda$ 且

$$p(s) - \frac{a'(s)}{a(s)} = 0, \quad \exp\left[-\int_{t_0}^s p(u) du\right] \geq \frac{t_0^\lambda}{s}$$

这样, 条件 1) 和 2) 成立。

另选取 3) 中的 $q(t)$ 使得 $a(t)q(t) \geq \delta t^{-1}$, 其中 $\delta \in \mathbf{R}$ 为一正常数。在条件 6) 中, 选取

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & \tau, \sigma \leq 0 \\ t - \tau, & \tau \geq 0, \tau \geq \sigma \\ t - \sigma, & \sigma \geq 0, \sigma \geq \tau \end{cases}$$

则对所有 $t \geq t_0$, $\sigma(t) \geq 1$, $\sigma'(t) = 1$ 。

现令 $H(t, s) = (t-s)^m$, $k(s) \equiv 1$, $m > 1$ 为整数, 则 $H(t, s) \in \mathcal{H}$, $h(t, s) = m(t-s)^{\frac{m-1}{2}}$ 。由文[8] 中的定理 41 可得 $H(t, s)a(s)q(s) \geq (t^m - mst^{m-1}) \delta s^{-1}$ 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) a(s) q(s) ds \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{(t-t_0)^m} \int_{t_0}^t \delta \frac{t^m - mst^{m-1}}{s} ds = \delta \lim_{t \rightarrow \infty} \sup (\ln t - m) = \infty$$

又 $\frac{a(s)}{\sigma^{m-2}(s)\sigma'(s)} h^2(t, s) \leq m^2 t_0^{-\lambda} (t-s)^{m-2} s$, 所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \frac{a(s)}{\sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)} h^2(t, s) ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t - t_0)^m} \int_{t_0}^t m^2 t_0^{-\lambda} (t - s)^{m-2} s ds = \frac{m t_0^{-\lambda}}{m - 1} < \infty$$

于是推论 1 的条件满足，从而可知：方程 (7) 的所有解都是振动的。然而，文献 [1—7] 中的准则均不能适用于方程 (7)。

参考文献：

[1] WANG Q R. Oscillation criteria for even order nonlinear damped differential equations[J] . Acta Math Hungar, 2002, 95(3) : 169—178.
[2] GRACE S R, LALLI B S. Oscillation theorems for damped differential equations of even order with deviating arguments[J] . SIAM J Math Anal, 1984, 15: 308—316.
[3] GRACE S R, LALLI B S. Oscillation theorems for nth order delay differential equations[J] . J Math Anal Appl, 1983, 91: 352—366.
[4] ROGOVCHENKO Yu V. Oscillation criteria for certain nonlinear differential equations[J] . J Math Anal Appl, 1999, 229: 399—416.
[5] 王其如. 二阶非线性微分方程的振动准则[J] . 数学学报, 2001, 44(2) : 371—376.
[6] KIGURADZE I T, CHANTURIA T A. Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations[M] . Dordrecht - Boston - London: Kluwer Academic Publishers, 1993.
[7] PHILOS Ch G. Oscillation theorems for linear differential equations of second order[J] . Arch Math (Basel) , 1989, 53: 482—492.
[8] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, PÓLYA G. Inequalities[M] . 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

Oscillation Criteria for High Order Nonlinear Differential Equations

WANG Qi ru, ZHU Si ming

(Department of Mathematics, Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: By the generalized Riccati technique, the averaging technique and differential inequalities, the oscillation for a class of high order nonlinear differential equations is discussed and new oscillation criteria are obtained.
Key words: high order differential equation; nonlinear; oscillation; generalized Riccati technique