

基于符号对象函数的状态反馈调节系统的CAD^{*}

吕志民, 刘 洋, 吕 劲

(中山大学电子与通信工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 针对 MATLAB 控制系统工具箱中极点配置函数, 不能完成状态反馈调节系统计算问题, 提出借助符号数学工具箱中有关符号对象函数, 构成 M 文件, 自动完成设计过程。该方法计算结果与仿真结果比较, 两者完全一致, 证明此方法的正确性和实用性。

关键词: 状态反馈; 调节系统; 符号对象函数

中图分类号: TP217.82; TP273.3 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2002) 02-0023-03

使用状态反馈极点配置方法设计调节系统, 是计算机控制系统设计常用的方法。利用 MATLAB 控制系统工具箱 (control system toolbox) 中的 place 或 acker 函数, 很容易求出全状态反馈闭环系统的反馈矩阵^[1], 使系统极点配置在所希望的位置上。然而当进一步求系统的状态变量、控制变量和系统输出时, 因涉及到变量符号和变量矩阵运算, 该工具箱无法单独完成此任务。

本文介绍借助 MATLAB 的控制系统工具箱与符号数学工具箱 (symbolic math toolbox) 中符号对象函数 (symbolic object functions)^[2], 建立相应的 M 文件, 自动完成状态反馈极点配置调节系统的设计与求解过程, 可显示各变量求解结果。文章还使用 Simulink 仿真工具箱对系统进行数字仿真, 所得的结果和理论计算一致, 说明本方法的正确性。本方法可用于计算机辅助教学 (CAI) 和计算机辅助设计 (CAD) 之中。

1 状态反馈极点配置综述

设 n 阶离散状态空间方程、状态反馈方程和输出方程为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ u(k) = -Lx(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1)$$

式中 A , B , C , L 均为常系数矩阵。

若系统采样周期 T_s 已知, 满足 $kT_s \leq t < (k+1)T_s$, $u(k) = \text{const}$, 且 $u(k)$ 幅度为无界, 系统状态完全可控和完全可测。系统状态空间方程可改写为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) - BLx(k) = \\ &= (A - BL)x(k) \end{aligned} \quad (2)$$

闭环系统特征方程为

$$|zI - A + BL| = 0 \quad (3)$$

式中 I 为 n 阶单位矩阵。特征方程的解是闭环系统的极点, 改变反馈增益矩阵 L , 能将极点设置在 z 平面任何位置上。

根据系统设计时提出的性能指标, 可以选取或计算出系统另一组期望极点, 期望的特征方程设为

$$(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n) = 0 \quad (4)$$

两组特征方程应该相等

$$|zI - A + BL| = (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n) \quad (5)$$

求解式 (5), 可得状态反馈增益矩阵 L

$$L = [l_1, l_2, \dots, l_n] \quad (6)$$

L 确定后, 系统的闭环极点便落在期望的位置上。

若要计算系统的状态变量 $x(k)$, 对式 (2) 两边进行 Z 变换, 有

$$zX(z) - zx(0) = (A - BL)X(z) \quad (7)$$

整理得

$$X(z) = [zI - A + BL]^{-1}zx(0) \quad (8)$$

上式两边取 Z 反变换, 得 $x(k)$

$$x(k) = Z^{-1}\{[zI - A + BL]^{-1}zx(0)\} \quad (9)$$

若系统初始状态 $x(0)$ 为已知, $x(k)$ 可惟一确定。根据式 (1) 的状态反馈方程和输出方程, 可求出系统控制变量 $u(k)$ 和输出变量 $y(k)$ 。

2 极点配置调节系统的 CAD

以伺服电机位置控制调节系统为例, 说明 CAD 设计全过程。

被控对象传递函数如图 1, 期望极点配置在 $P_{1,2} = 0.3930 \pm j0.4621$ 处, 系统初始状态 $x(0) = [1, 1]^T$, 采样周期 $T_s = 1$ s, 设计调节器的状态反馈增益矩阵 L 和计算系统的状态变量 $x(k)$ 。

* 收稿日期: 2001-11-01

$$u(k) \rightarrow \frac{1-\exp(-T_s s)}{s} \frac{u(t)}{s(s+1)} \rightarrow y(t)$$

图 1 被控对象传递函数

Fig 1 The transfer function of controlled object

(1) 连续对象模型离散化。据图 1 得系统连续状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{F}x(t) + \mathbf{G}u(t) \\ y(t) = \mathbf{H}x(t) + \mathbf{J}u(t) \end{cases} \tag{10}$$

式中, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{H} = [0 \ 1]$, $\mathbf{J} = [0]$

使用控制系统工具箱模型转换命令, 求得式 (1) 离散状态空间方程和输出方程各矩阵。

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}] = c2dm(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, T_s, 'ZOH') \tag{11}$$

式中, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.3679 & 0 \\ 0.6321 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.6321 \\ 0.3679 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [0 \ 1]$, $\mathbf{D} = [0]$

(2) 求状态反馈增益矩阵。把期望极点写成行向量形式, 有

$$\mathbf{P} = [p_1, p_2] \tag{12}$$

使用 place 或 acker 函数, 求出状态反馈增益矩阵 $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}) \tag{13}$$

若 p_1 与 p_2 为重极点, 须用 acker 函数, 求得 $\mathbf{L}$ 为

$$\mathbf{L} = [0.384 \ 7, 0.920 \ 7] \tag{14}$$

(3) 使用符号对象函数 sym 定义 z 为符号变量, $\mathbf{I}$ 为 2 阶单位矩阵, 计算逆矩阵 $[\mathbf{z}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{L}]^{-1}$

$$\mathbf{M} = \text{inv}(\mathbf{z}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{L}) \tag{15}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{z - 0.1835}{z^2 - 0.7860z + 0.3680} & \frac{-0.5820}{z^2 - 0.7860z + 0.3680} \\ \frac{0.4906}{z^2 - 0.7860z + 0.3680} & \frac{z - 0.0692}{z^2 - 0.7860z + 0.3680} \end{bmatrix}$$

(4) 根据初始状态值 $x(0)$ 和式 (8), 求出 $X(z)$ 表达式, 使用 simplify 和 pretty 函数显示 $X(z)$ 简化后的结果。

$$X(z) = \begin{bmatrix} \frac{z^2 - 1.2433}{z^2 - 0.7860z + 0.3680} \\ \frac{z^2 + 0.3659}{z^2 - 0.7860z + 0.3680} \end{bmatrix}$$

(5) 使用 deconv 函数分别求出 $X_1(z)$ 与 $X_2(z)$ 前 5 个采样周期的样值, 如表 1 所示。

3 极点配置调节系统的数字仿真

根据式 (1) 画出伺服电机位置控制调节系统的结构图, 如图 2 所示。据调节器定义, 在输入信号 $r(t) = 0$ 与 $x(0) = [1, 1]^T$ 情况下, 使用 Simulink 模拟工具箱, 可得状态变量 $x(k)$ 的采样值, 前 5 个节拍样值如表 2 所示, $x(k)$ 输出特性曲线如图 3。

表 1 理论计算 $x_1(k)$ 与 $x_2(k)$ 采样值

Tab 1 The sampled data of $x_1(k)$ and $x_2(k)$ to theoretic calculation

项目	采样节拍				
	0	1	2	3	4
$x_1(k)$	1	-0.4573	-0.7274	-0.4035	-0.0494
$x_2(k)$	1	1.1519	0.5374	-0.0015	-0.1990

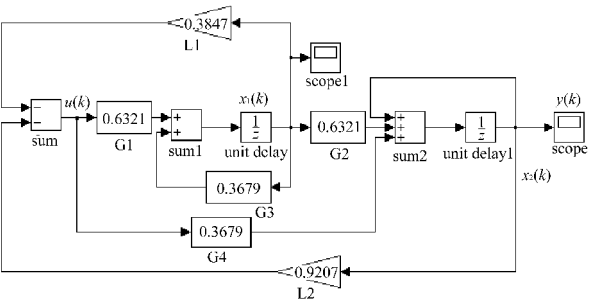


图 2 调节系统结构图

Fig 2 The block schematic diagram of regulation system structure

表 2 仿真所得 $x_1(k)$ 与 $x_2(k)$ 采样值

Tab 2 The sampled data of $x_1(k)$ and $x_2(k)$ to simulation

项目	采样节拍				
	0	1	2	3	4
$x_1(k)$	1	-0.4572	-0.7274	-0.4035	-0.0495
$x_2(k)$	1	1.1518	0.5374	-0.0015	-0.1989

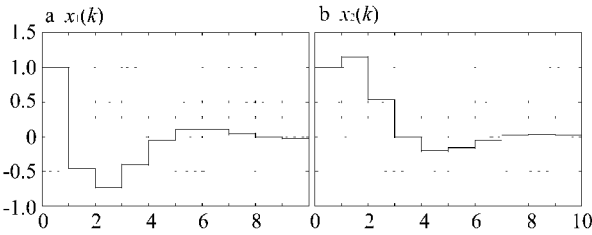


图 3 状态变量 $x(k)$ 特性曲线

Fig 3 The characteristic curves of state variables $x(k)$

比较表 1 与表 2 中各采样值, 除最后一位数字因舍入误差外, 数据完全一致, 说明本文介绍的 CAD 方法是正确的和实用的。

参考文献:

[1] ÅSTRÖM K J, WITTENMARK B. Computer-controlled systems: theory and design[M]. 3rd ed. Prince Hall Inc, 1997.
[2] HANSEIMAN D, LITTLEFIELD B. Mastering MATLAB: a comprehensive tutorial and reference[M]. Prentice Hall Inc, 1996.

(下转第 28 页)

时间区间, 电路中没有可觉察的电流; 证明此时的铁电屏蔽电荷量已达热平衡值。如果屏蔽电荷不须沿晶体表面扩散以建立均匀的二维有序分布^[5], 则只要 $T > T'$, $I(t)$ 曲线第 1 个半周期的波形应不随 T 变。但实验结果并非如此。虽然 $T \geq 10\text{ ms}$ 时 $I(t)$ 波形不随 T 而变; 但 $T' < T < 10\text{ ms}$ 时, $I(t)$ 波形却变成图 5 点线形状, 并且正负半周期的 $I(t)$ 曲线不再反号相等。曲线的半周期积分也随 T 的减小而比自发极化强度相应的值越来越小。这就证明了在 $T' = 0.2\text{ ms} < 10\text{ ms}$ 的时间内, 屏蔽电荷要沿表面扩散以达均匀有序分布才能建立稳定的铁电极化状态; 这种扩散运动垂直于表面电极, 故不会在电路中产生电流。在方波电压的作用下, 电极向晶体表面注入的屏蔽电荷一般地不可能有面均匀分布, 这种扩散所需时间约长达 10 ms 。

图 4 类型软模激发的屏蔽电荷也是面分布不均匀的, 其表面扩散所需时间也不会小于 ms 级。因此, 完成铁电相变所需时间一般要用 ms 的尺度来衡量; 比晶格振动中软模的半周期要大许多个数量级。

早在 20 世纪 50 年代, 国外就已在 BaTiO_3 单晶中定性观察到类似于图 5 的实验结果^[7]。但当时只注意技术应用, 使铁电相变的详细物理图像隐藏了半个世纪; 至今才搞明白。

6 结论和讨论

用有限晶格动力学的简谐子软模理论说明了钛酸钡立方至四方的铁电相变过程。这种理论并不和传统的铁电软模理论对立; 但显得更为细致, 特别是和实验符合得更好。钙钛矿结构还有各种其他的结构相变, 可望也能用有限晶格动力学加以说明。

参考文献:

[1] 李景德, 陆夏莲, 李家宝. 立方结构体系的真简谐模[J]. 中国科学, 1991, A(6): 614—621.
[2] LI J D. Three body interactions in acoustic vibration of a finite lattice[J]. Chinese Physics Letters, 1985, 2(10): 465—468.
[3] 陆夏莲, 李景德, 李智强, 等. 有限晶格动力学中的自对称坐标[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1999, 38(5): 27—30.
[4] SILVERMAN B D, KOSTER G F. Infrared active modes of cubic strontium titanate[J]. Zeitschrift für Physik, 1961, 165: 334—335.
[5] 李景德, 李智强, 陆夏莲, 等. 铁电屏蔽理论[J]. 物理学报, 2000, 49(1): 160—163.
[6] 李景德, 陈敏, 方传代, 等. 极性相变的介电谱研究[J]. 物理学报, 1999, 48(4): 721—728.
[7] 许煜寰. 铁电与压电材料[M]. 北京: 科学出版社, 1978: 103—105.

Harmonon Soft Modes in Ferroelectric Phase Transition

QIU Cui huan¹, LI Zhi qiang², HE Shan², CHEN Min²

(1. Department of Physics, Guangdong College of Pharmacy, Guangzhou 510224, China;

2. Department of Physics, Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The soft modes in finite size cubic BaTiO_3 crystal with free boundary were calculated, and they can be used to explain the phenomenon that crystal has the structure of a and c domains in ferroelectric phase transition while temperature reduction. The theory indicated that the process of ferroelectric phase transition was involved in the excitation of screen charges and slow diffusion on their interface till homogeneous spontaneous polarization in each electric domain. All above details were strongly proved by the experiments.

Key words: ferroelectric phase transition; soft mode; hammonon

(上接第 24 页)

The CAD of Regulation System by State Feedback
Based on Symbolic Object Functions

L ÜZhi min, LIU Yang, L ÜJing

(Department of Electronics and Communication Engineering,

Sun Yan sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: With using the symbolic object functions in MATLAB symbolic math toolbox, a CAD method of regulation system by state feedback is presented. The result shows it is a correct and pratical method.

Key words: state feedback; regulation system; symbolic object functions