

对 Milošević不等式的推广与证明^{*}

曾 峥

(肇庆学院数学系, 广东 肇庆 526061)

摘 要: 对 D. M. Milošević 给出的几何不等式 $\sum \frac{a}{b+c} \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2R} \right) \geq \frac{3}{8}$ 进行了改进和加强, 并给出了相应的证明。

关键词: Milošević 不等式; Gerretsen 不等式; Euler 不等式; 几何不等式

中图分类号: O156.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 03-0116-03

几何不等式的研究越来越引起了人们的关注, 许多重要的结论不断取得新的进展。D. M. Milošević 在 1991 年曾给出了一个几何不等式^[1]: 在 $\triangle ABC$ 中, 不等式

$$\sum \frac{a}{b+c} \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2R} \right) \geq \frac{3}{8} \quad (1)$$

从不等式 (1) 以及 $\sum \cos^3 \frac{A}{2}$ 的结果^[2-4], 可以推广到 $\sum \sin^3 \frac{A}{2}$ 及 $\sum \cos^3 A$ 的情形, 从而得出比 (1) 式更强的结论。为方便起见, 本文把 3 个内角 (A, B, C) 可以取 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0 \right]$ 及 $(0, 0, \pi)$ 的 $\triangle ABC$ 称为广义 $\triangle ABC$, 并把结论表述为:

定理 1 在广义 $\triangle ABC$ 中

$$\frac{3}{8} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2R} \right) \leq \sum \sin^3 \frac{A}{2} \leq 1 \quad (2)$$

亦即

$$\frac{3}{8} \leq \frac{1}{2} \sum \sin^2 \frac{A}{2} \leq \sum \sin^3 \frac{A}{2} \leq 1 \quad (3)$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,

$$\frac{1}{2} \sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{r}{2R} \right) = \frac{3}{8}$$

当且仅当 (A, B, C) = $(\pi, 0, 0)$ 或 $(0, \pi, 0)$ 或 $(0, 0, \pi)$ 时

$$\sum \sin^3 \frac{A}{2} = 1$$

其中, $\sum \sin^3 \frac{A}{2} < 1$ 对符合 $0 < A, B, C < \pi$ 且 $A + B + C = \pi$ 的任意角 $\triangle ABC$ 仍成立。

定理 2 在非钝角 $\triangle ABC$ 中

$$\frac{3}{8} \leq \frac{1}{2} \sum \cos^2 A \leq \sum \cos^3 A < 1 \quad (4)$$

当且仅当正三角形时, “ $\leq$ ” 取等号; 且当 ($A, B,$

C) $\rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ 或 $\left[\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \right]$ 或 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0 \right]$ 时 $\sum \cos^3 A \rightarrow 1$, 其中, $\sum \cos^3 A < 1$ 对任意 $\triangle ABC$ 成立。

为证明上述结论, 先给出几个引理:

引理 1 对 $\triangle ABC$, $\frac{a}{b+c} \geq \sin \frac{A}{2}$ 。

这是 1986 年 Andrica 给出的结果^[1]。

引理 2^[4] 对 $k = \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}$ 有

$$\left(\frac{p}{R} \right)^2 \leq \frac{1}{4} (27 - 18k^2 + 8k^3 - k^4)$$

其中, p 为三角形半周长, R, r 分别为该三角形外接圆、内切圆半径。

引理 3 对非钝角 $\triangle ABC$, $p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$; 对任意 $\triangle ABC$, $p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ 。

前者就是著名的 Gerretsen 不等式^[5]; 对于后者, 由引理 2 及 $k \in [0, 1]$ 时 $k^2(k-1)^2(k-3)^2 \geq 0$ 以及 $k = \sqrt{1 - \frac{2r}{R}} \in [0, 1]$ 有

$$\frac{1}{4} (27 - 18k^2 + 8k^3 - k^4) \leq \frac{(9-k^2)^2}{4(3+k^2)}$$

易见, 引理 3 成立。

在上述引理的基础上, 给出定理 1、定理 2 的完整证明。

证明 由三角形恒等式

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$$

可知, (2) 式等价于

$$\frac{3}{8} \leq \frac{1}{2} \sum \sin^2 \frac{A}{2} \leq \sum \sin^3 \frac{A}{2} \leq 1$$

在变换 $f: \alpha = \frac{B+C}{2}, \beta = \frac{C+A}{2}, \gamma = \frac{A+B}{2}$ 之

* 收稿日期: 2001-11-01

作者简介: 曾峥 (1961-), 男, 副教授, E-mail: zhen@163.net

下, 符合 $0 < A, B, C < \pi$ 且 $A+B+C=\pi$ 的角 A, B, C 被变换成三角形 $\triangle'$ 的 3 个内角,

$$\sin \frac{A}{2} = \sin \left[\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \right] = \cos \alpha$$

从而, 广义三角形 $\triangle$ 中的不等式

$$\sum \sin^3 \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} \sum \sin^2 \frac{A}{2}$$

等价于非钝角三角形 $\triangle'$ 中的不等式

$$\sum \cos^3 \alpha \geq \frac{1}{2} \sum \cos^2 \alpha$$

符合条件 $0 < A, B, C < \pi$ 且 $A+B+C=\pi$ 的不等式 $\sum \sin^3 \frac{A}{2} < 1$ 等价于任意 $\triangle'$ 中的不等式 $\sum \cos^3 \alpha < 1$.

下面改证: 对非钝角三角形 $\triangle'$,

$$\frac{3}{8} \leq \frac{1}{2} \sum \cos^2 \alpha \leq \sum \cos^3 \alpha \leq 1$$

其中, $\sum \cos^3 \alpha \leq 1$ 对任意广义三角形 $\triangle'$ 仍然都成立.

由三角形中的恒等式

$$\sum \cos^3 \alpha = \frac{(2R+r)^3 - 3p^2r - 1}{4R^3} \quad (5)$$

欲证

$$\sum \cos^3 \alpha = \frac{(2R+r)^3 - 3p^2r - 4R^3}{4R^3} < 1$$

即证

$$(2R+r)^3 - 3p^2r - 8R^3 < 0$$

当 $p > 2R+r$ 时,

$$\begin{aligned} \text{左边} &= r(12R^2 + 6Rr + r^2 - 3p^2) < \\ r(12R^2 + 6Rr + r^2 - 12R^2 - 12Rr - 3r^2) &= \\ r(-6Rr - 3r^2) &= 3r^2(-2R - r) < 0 \end{aligned}$$

由三角形中的恒等式:

$$\sum \cos^2 \alpha = 3 + \frac{4Rr + r^2 - p^2}{2R^2}$$

和 (5) 式可知

$$\sum \cos^3 \alpha \geq \frac{1}{2} \sum \cos^2 \alpha$$

等价于

$$\frac{(2R+r)^3 - 3p^2r - 1}{4R^3} \geq \frac{1}{2} \left(3 + \frac{4Rr + r^2 - p^2}{2R^2} \right)$$

即,

$$p^2(R-3r) \geq 2R^3 - 8R^2r - 5Rr^2 - r^3 \quad (6)$$

当 $R \geq 3r$ 时, 由引理 3, $p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$. 从而, 对非钝角三角形 $\triangle'$, 必有:

$$\begin{aligned} p^2(R-3r) &\geq (R-3r)(2R^2 + 8Rr + 3r^2) = \\ r[(R-3r)(15R + 24r) + 74r^2] + \\ 2R^3 - 8R^2r - 5Rr^2 - r^3 &\geq \\ 2R^3 - 8R^2r - 5Rr^2 - r^3 \end{aligned}$$

当 $R < 3r$ 时, 由 Euler 不等式 $R \geq 2r$, 此时 $2r \leq R < 3r$, 由引理 3,

$$p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$$

$$\begin{aligned} p^2(R-3r) &= -p^2(3r-R) \geq \\ -(3r-R) \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)} \end{aligned}$$

由 $R \geq 2r$ 及 $R, r \in \mathbf{R}^+$,

$$(2r-R)(r^3 + 5r^2R + 12rR^2 + 8R^3) \leq 0$$

易见

$$R(4R+r)^2(3r-R) \leq$$

$$2(2R-r)(r^3 + 5r^2R + 8rR^2 - 2R^3)$$

从而, 此时的 (6) 式显然成立, 当且仅当 $R = 2r$ 时取等号, 此时 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, 亦即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

注意到 (6) 式对 $\text{Rt } \triangle'$ 也成立, 此时 $\triangle ABC$ 为 (A, B, C) 是 $(0, 0, \pi), (0, \pi, 0), (\pi, 0, 0)$ 的情形, 即三角形的极限状态.

当 $(A, B, C) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0 \right)$ 时, (2) 式化为

$$\frac{3}{8} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$$

显然成立. 至于 $\frac{1}{2} \sum \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3}{8}$, 亦即

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2R} \right) \geq \frac{3}{8}$$

这是显然的 (由 $R \geq 2r$ 或 (1) 式都可容易推出). 由引理 1,

$$\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$$

$$\sin \frac{A}{2}, \sin \frac{B}{2}, \sin \frac{C}{2} \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \sum \frac{a}{b+c} \sin^2 \frac{A}{2} &\geq \sum \left[\left(\sin \frac{A}{2} \right) \sin^2 \frac{A}{2} \right] \geq \\ \frac{1}{2} \sum \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2R} \right) \geq \frac{3}{8} \end{aligned}$$

所以 (2) 式的确是

$$\sum \frac{a}{b+c} \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2R} \right) \geq \frac{3}{8}$$

的改进和加强.

在本文中, $\triangle ABC$ 中的不等式 $\sum \cos^3 A < 1$ 以及 $\sum \sin^3 \frac{A}{2} < 1$ 不仅比陈计^[6] 1998 年 6 月的结论 $\sum \sin^3 \frac{A}{2} \leq \cos^3 A < \frac{38}{31}$ 更精确, 而且 $\sum \sin^3 \frac{A}{2} < 1$ 的适用范围已拓广为符合条件 $0 < A, B, C < \pi$ 且 $A+B+C=\pi$ 的任意角 A, B, C .

参考文献:

[1] MITRINOVIC P.V, CHIN J. Addenda to the monograph

“recent advances in geometric inequities”[J] . I J Ning-bo University, 1991, 4(2): 85, 87.

[2] 孔凡哲. 关于 $\sum \cos^3 \frac{A}{2}$ 及其几何不等式[J] . 渝州大学学报(自然科学版), 1995, 12(2): 33.

[3] 单墀. 几何不等式在中国[M] . 南京: 江苏教育出版社, 1996: 283.

[4] 孔凡哲. $\sum \cos^3 \frac{A}{2} < 2$ 与 Kooistra 不等式[J] . 佛山大学学报, 1996, 14(4): 24.

[5] 匡继昌. 常用不等式[M] . 长沙: 湖南教育出版社, 1993: 253.

[6] 陈计, 王振. 一个三角不等式的推广和加强[J] . 成都大学学报(自然科学版), 1998, 17(2): 1—4.

The Popularization and Proving on Milošević's Inequality

ZHENG Zeng

(Department of Mathematics, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, Guangdong, China)

Abstract: The geometrical inequality $\sum \frac{a}{b+c} \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2R} \right) \geq \frac{3}{8}$ given by D. M. Milošević is improved and strengthened. The relevant proofs are given.

Key words: Milošević's inequality; Gerretsen's inequality; Euler's inequality; geometrical inequality

(上接第 115 页)
可证明上式有对称解当且仅当

$$u_{2j} u_{2j}^T P_{N(u_{1j}^T)} = P_{N(u_{1j}^T)}$$

即 $N(u_{1j}^T) \subseteq R(u_{2j})$

这相当于 $V_{22}^T P_j P_j^T V_{12} = 0, j = 1, 2, \cdots, l-1$ 。这时式 (9) 等价于

$$P_{N(u_{1j}^T)} u_{2j} (G_{2j} - I) = 0$$

用引理 1 经推导可得 G_{2j}, C_{2j} 表达式。具体推导略。

参考文献:

[1] DAI H, LANCASTER P. Linear matrix equations from

an inverse problem of vibration theory[J] . Linear Algebra Appl, 1996, 246: 31—47.

[2] HENK Don F J. On the symmetric solution of a linear matrix equation[J] . Linear Algebra Appl, 1987, 93: 1—7.

[3] XIE D X, ZHANG L, HU X Y. The solvability conditions for the inverse problem of bisymmetric nonnegative definite matrices[J] . J Computational Math, 2000, 18 (6): 597—608.

The Bisymmetric Solutions of Matrix Equation $XA=YAD$

WU Zhu zhu¹, WANG Guo rong²

(1. Department of Computer, Shaoguan University, Shaoguan 512005, Guangdong, China;
2. College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: When D is a symmetric matrix, the general solution pairs (X, Y) and the general bisymmetric solution pairs of the equation $XA=YAD$ are presented. The necessary and sufficient conditions for the existence of the bisymmetric solution pairs of the simultaneous matrix equations $XA=YAD, A^T XA=D$ and the general forms of such solutions are derived.

Key words: matrix equation; symmetric matrix; bisymmetric matrix; generalized inverses of matrices; projection operator