

挠性空间结构动力学系统的可辨识性^{*}

徐建国

(佛山科学技术学院信息科学与数学系, 广东 佛山 528000)

摘要: 研究了挠性空间结构系统的可辨识性。依据该无穷维动力学系统的固有基本特性, 利用函数空间分析方法, 得到了2种观测器模式下, 系统的部分可辨识和完全可辨识的充分必要条件, 并与系统的可控性和可观性条件进行了比较。

关键词: 挠性结构系统; 可辨识性; 函数空间方法

中图分类号: O326; O231.4 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579(2002)04-0015-05

大型挠性空间结构(LFSS)系统动力学与控制近年来日益成为重要的研究课题。其中挠性体系统的辨识本质上是对无穷维实际系统进行有限维模型逼近的过程, 而动力学系统是否可辨识又是其中的基本问题。挠性结构系统的可辨识性意义在于挠性体系统的状态输入和输出数据能否完全地反映系统的动力学特性, 它与系统的空间构形及控制器和观测器配置特征有关。针对同一种点控制器, 在点观测器配置模式下系统的可辨识性只能归结为部分可辨识性, 而在分布式观测器配置模式下系统的可辨识性才可能为完全可辨识性^[1-3]。因为完全可辨识性将保证由输入输出数据构造的数学模型与实际的挠性体系统在所有空间变量点 $r \in \Omega$ 上具有相同的动力学特性, 这就要求系统的输入输出数据惟一确定系统的特征值和特征向量。其中特征向量必须是定义在整个空间变量 $r \in \Omega$ 上, 而对于点控制点测量的挠性体系统, 由于系统的输出数据仅含有在观测点处的空间变量的模态信息, 要由此确定所有空间变量点 $r \in \Omega$ 的模态, 直观上一般是不可能达到的; 同时, 系统在控制点和观测点处的动力学特性主要受系统的特征值和特征向量在控制点和观测点处的取值影响, 而与特征向量在整个空间变量 $r \in \Omega$ 的其它点的取值关系不大。基于上述原因, 依据无穷维挠性体动力学系统的固有基本特性, 利用函数空间分析方法, 本文研究具有阻尼、陀螺部件和约束阻尼的空间挠性结构系统在点控制器下, 由点观测器和分布式观测器2种不同配置模式下得到所产生的系统的2种可辨识性: 部分可辨识性和完全可辨识性的充分必要条件。

1 动力学系统的部分可辨识性

考虑具有阻尼、陀螺部件和约束阻尼的无穷维挠性结构动力学系统:

$$M\ddot{w}(r, t) + (D + G)\dot{w}(r, t) + (K + F)w(r, t) = f(r, t) \quad (1)$$

其中, $r \in \Omega$; 边界条件为 $Lw(r, t) = 0$, 其中 $r \in \partial\Omega$; 各符号所代表的意义与文[4]相同。下面给出控制器和观测器空间配置模式。

设系统(1)的控制器为点控型, 即 p 个点控制器分别置于 $c_1, c_2, \dots, c_p$ 处, 控制力 $f(r, t)$ 为:

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^p \delta(r - c_k) u_k(t) \quad (2)$$

而系统(1)的传感器为点观测器, 即 q 个点观测器分别置于 $s_1, s_2, \dots, s_q$ 处, 输出量 $y(t) = (y_1(t), \dots, y_q(t))^T$ 的分量

$$y_k(t) = \begin{cases} w(s_k, t) & \text{对位移传感器} \\ \dot{w}(s_k, t) & \text{对速度传感器} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (3)$$

根据文[4], 设 H_E 为函数空间, 可导出受控挠性结构系统(1) - (3)的状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ y = Cz \end{cases} \quad (4)$$

其中, $z \in H_E$ 为系统状态, $u(t) \in L^2([0, T]; U)$ 是系统输入; $y(t) \in L^2([0, T]; Y)$ 是系统输出, $U = C^p$ 为输入空间, $Y = C^q$ 为输出空间; 系统的主算子 $A = A_1 + A_2$, 而

* 收稿日期: 2001-12-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19402014); 广东省自然科学基金资助项目(960528)

作者简介: 徐建国(1964-), 男, 博士后, 副教授; E-mail: xjianguo@foshan.net

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & K^{1/2} \\ K^{-1/2} & -D-G \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -FK^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{q}(r-c_1) & \cdots & \tilde{q}(r-c_p) \end{pmatrix} \\ u &= \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_q \end{pmatrix} \\ C_k z &= \begin{cases} K^{1/2} M^{1/2} w(s_k, t) & \text{对位移传感器} \\ M^{1/2} \dot{w}(s_k, t) & \text{对速度传感器} \end{cases} \end{aligned}$$

针对挠性结构系统(4)亦即 $s = (A, B, C)$, 考虑挠性体系统集合

$$S = \{s_n \mid s_n = (A_n, B_n, C_n)\}$$

其中, A_n, B_n, C_n 分别为系统的状态、输入、输出算子,并且满足:

① 系统的状态空间为 H_E , 输入空间为 U , 输出空间为 Y ;

② A_n 是未知算子, 但 A_n 与 A 一样都具有紧预解算子; $B_n = B, C_n = C$ 为给定算子。

设 $s_n = (A_n, B_n, C_n) \in S$, 且 $\{\lambda_k^n, \varphi_k^n\}$ 是 A_n 的特征解, $\{\lambda_k^n, \psi_k^n\}$ 是 A_n^* (A_n 的共轭伴随算子) 的特征解; 由于 $B_n^* \psi_k^n = B^* \psi_k^n = V_k^n, C_n \varphi_k^n = C \varphi_k^n = J_k^n U_k^n$, 由文[4], 对于输入 $u \in U$ 和零初始状态 $z(0, r) = 0$, 系统状态的输出

$$y(t) \triangleq y(\lambda_k^n, \sigma_k^n, u, t) =$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k^n(t-\tau)) \langle \varphi_k^n, B_n u(\tau) \rangle \\ &\quad C_n \psi_k^n d\tau = \\ &\int_{-\infty}^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k^n(t-\tau)) (V_k^n)^T u(\tau) J_k^n U_k^n d\tau \quad (5) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_k^n &= \begin{pmatrix} \alpha_{kl}^n & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{kq}^n \end{pmatrix} \\ \alpha_{kl}^n &= \begin{cases} 1 & \text{第 } l \text{ 个传感器为位移传感器} \\ \lambda_k^n & \text{第 } l \text{ 个传感器为速度传感器} \end{cases} \\ l &= 1, 2, \cdots, q \\ V_k^n &= (\xi_k^{n*}(c_1), \cdots, \xi_k^{n*}(c_p))^T \\ \psi_k^n &= (\eta_k^{n*}, \xi_k^{n*})^T \\ U_k^n &= (\eta_k^n(s_1), \cdots, \eta_k^n(s_q))^T \\ \varphi_k^n &= (\eta_k^n, \xi_k^n)^T \end{aligned} \quad (6)$$

(5) 式中参量 $\sigma_k^n = U_k^n (V_k^n)^T$ 表示控制点和观测点处的模态信息。

定义1 若存在 $u \in U$, 使得对于 $s_n \in S$ 有

$$y(\lambda_k^n, \sigma_k^n, u, t) = y(\lambda_k, \sigma_k, u, t) \quad (7)$$

意味着 $\lambda_k^n = \lambda_k, \sigma_k^n = \sigma_k$ 成立, 则称挠性体系统(4)是部分可辨识的。

定理1 对于点测量挠性体系统(4), 即 $s = (A, B, C) \in S$, 系统部分可辨识的必要条件为

$$U_k \neq 0, V_k \neq 0, k = \pm 1, \pm 2, \cdots \quad (8)$$

系统部分可辨识的充分条件是

$$\sigma_k = U_k (V_k)^T \text{ 无零元}, k = \pm 1, \pm 2, \cdots \quad (9)$$

这里, U_k, V_k 形如 (6) 式, 即

$$\begin{aligned} V_k &= (\xi_k^*(c_1), \cdots, \xi_k^*(c_p))^T \\ \psi_k &= (\eta_k^*, \xi_k^*)^T \\ U_k &= (\eta_k(s_1), \cdots, \eta_k(s_q))^T \\ \varphi_k &= (\eta_k, \xi_k)^T \end{aligned}$$

其中, φ_k, ψ_k 分别为 A 和 A^* 相应于 λ_k 和 λ_k 的特征向量。

证明 设挠性系统的初始状态为零, 即 $z(r, 0) = 0$, 输入为 u , 则系统的输出

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k(t-\tau)) (V_k)^T u(\tau) J_k U_k d\tau \quad (10)$$

必要性的证明: 用反证法。假设存在 k_0 , 使得 $U_{k_0} = 0$ 或 $V_{k_0} = 0$, 由 (10) 式可知, 系统的动态响应输出 $y(t)$ 将不受 λ_{k_0} 的影响。而 λ_{k_0} 是系统的第 k_0 个特征值, 此即系统的输出不能惟一确定系统的第 k_0 个特征值, 由系统的部分可辨识性的定义推知系统不是部分可辨识的矛盾。故系统部分可辨识的必要条件为(8) 式成立。

充分性的证明 由(10) 式可导出在脉冲信号 $\delta(t)$ 的系统输入下, 系统的脉冲响应输出

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k t) J_k U_k (V_k)^T$$

设存在挠性体系统 $s_n = (A_n, B_n, C_n)$, 其脉冲响应为

$$y_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k^n t) J_k^n U_k^n (V_k^n)^T$$

由 $y(t) = y_n(t)$ 得

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k^n t) J_k^n U_k^n (V_k^n)^T = \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k t) J_k U_k (V_k)^T \end{aligned} \quad (11)$$

由 Dirichlet 序列表示惟一性, 比较 (11) 式两端得

$$\lambda_k = \lambda_k^n$$

$$J_k^n U_k^n (V_k^n)^T = J_k U_k (V_k)^T$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

注意到, V_k^n, J_k^n 和 U_k^n (相应地 V_k, J_k 和 U_k) 各矩阵的特性可得

$$\begin{aligned}\lambda_k^n &= \lambda_k \\ U_k^n (V_k^n)^T &= U_k (V_k)^T \\ \text{或 } \sigma_k^n &= \sigma_k\end{aligned}$$

且 $\sigma_k = U_k (V_k)^T$ 无零元 ($k = \pm 1, \pm 2, \cdots$)。此即系统是部分可辨识的。证毕。

定理 1 揭示了系统部分可辨识不仅与控制器而且与观测器配置点有密切关系。比较文 [4] 研究得出的系统近似可控、近似可观的充要条件, 不难看出, 若系统是部分可辨识的, 则系统一定是近似可控、近似可观的; 反过来系统是近似可控又是近似可观的, 不一定保证系统是部分可辨识的, 因为部分可辨识的充分条件 (9) 式比必要条件 (8) 式强, (9) 式揭示的系统部分可辨识的充分条件意味着系统部分可辨识不仅要求系统控制器配置点与共轭系统模态零点不重合, 而且还要求系统观测器配置点与系统模态零点无一重合。

2 动力学系统的完全可辨识性

本节假设挠性体系统的控制器为如同上节点控制器, 而系统配置的敏感器为分布型敏感器。引进输出空间 $Y = L^2(\Omega)$, 定义输出算子 $C = [I, 0] : H_E \rightarrow Y, Cz = w(r, t)$ 。从而挠性系统的函数空间状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ y = Cz \end{cases} \tag{12}$$

其中, 除输出算子 C 和系统的输出 y 外, 其它各参变量的意义与上节相同。可见挠性系统 (1) 的动力学特性完全由其状态空间方程 (12) 所描述, 而其中的控制算子 B 和输出算子 C 为给定算子。从而挠性体系统的辨识问题实质上就是与挠性体刚度 (K)、阻尼特性 (D)、角动量存贮特性 (G) 和约束阻尼特性 (F) 等有关的系统的状态主算子 A 的辨识问题, 下面对其进行研究。

记挠性结构系统 (12) 为 $s = (A, B, C)$, 对于系统的输入 u , 相应于系统的零初始状态的输出为

$$\begin{aligned}y(t) &= y(s, u, t) = \\ &\int_{-\infty}^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k(t-\tau)) \langle \psi_k, Bu(\tau) \rangle C\varphi_k d\tau \tag{13}\end{aligned}$$

考虑挠性体系统集合

$$S = \{s_n : s_n = (A_n, B_n, C_n)\}$$

其中, A_n, B_n, C_n 分别为系统的状态、输入、输出算子, 满足 (12) 式, $B_n = B, C_n = C$ 为已知算子, A_n 为未知算子但其具有与 A 一样的性质, 主要是其具

有紧预解算子。同上面的推理相同, 系统 $s_n = (A_n, B_n, C_n)$ 相应于零初始状态的输出为

$$\begin{aligned}y(t) &= y(s_n, u, t) = \\ &\int_{-\infty}^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k^n(t-\tau)) \langle \psi_k, Bu(\tau) \rangle C\varphi_k^n d\tau \tag{14}\end{aligned}$$

定义 2 称挠性结构系统 $s = (A, B, C) \in S$ 是完全可辨识的, 若存在输入 $u \in U$, 使得对于 $s_n = (A_n, B_n, C_n) \in S$ 有

$$\begin{aligned}y(s_n, u, t) &= y(s, u, t) \\ \text{意味着 } s_n &= s \tag{15}\end{aligned}$$

定义 2 表明, 由系统的输出可惟一确定系统模型, 由于系统状态方程中算子 B, C 为给定算子, 故惟一确定状态算子, 这区别于上节研究的部分可辨识中由系统的输出确定系统的特征值和系统在控制点和观测点上的模态信息, 由此反映出系统完全可辨识的真正含义。

定理 2 对于分布式测量的挠性结构系统 (12), 即 $s = (A, B, C) \in S$, 系统完全可辨识的必要条件为

$$V_k \neq 0 \quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{16}$$

而系统完全可辨识的充分条件为存在 $p_0 (1 \leq p_0 \leq p)$, 使得

$$\xi_k^*(c_{p_0}) \neq 0 \quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{17}$$

其中, $V_k = (\xi_k^*(c_1), \cdots, \xi_k^*(c_p))^T, \psi_k = (\eta_k^*, \xi_k^*)^T$ 是 A^* 相应于特征值 λ_k 的特征向量。

证明 相应于零初始状态的系统输出为

$$\begin{aligned}y(t) &= Cz(r, t) = \\ &\int_{-\infty}^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k(t-\tau)) \langle \psi_k, Bu(\tau) \rangle C\varphi_k d\tau = \\ &\int_{-\infty}^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k(t-\tau)) (V_k)^T u(\tau) C\varphi_k d\tau\end{aligned}$$

必要性证明 用反证法。假设存在 k_0 , 使得 $V_{k_0} = 0$, 则由上式不难看出, λ_{k_0} 不影响系统的输出。故由系统输出不能惟一确定系统的第 k_0 个模态振型, 从而亦不能惟一确定算子 A , 这样系统 $s = (A, B, C) \in S$ 将是不可辨识的, 矛盾。故 (16) 式成立。

充分性证明 设存在 $p_0 (1 \leq p_0 \leq p)$ 使得 $\xi_k^*(c_{p_0}) \neq 0, k = \pm 1, \pm 2, \cdots$ 对系统 $s = (A, B, C) \in S$, 取系统的输入 $u_j(t) = \delta(t) (j = p_0)$ 或 $u_j(t) = 0 (j \neq p_0)$, 可得系统的输出

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k t) \xi_k^*(c_{p_0}) C\varphi_k$$

同样设系统 $s_n = (A_n, B_n, C_n) \in S$, 取与上相同的

系统输出 $u_j(t) = \tilde{q}(t) (j = p_0)$ 或 $u_j(t) = 0 (j \neq p_0)$, 有系统的输出

$$y_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k^n t) \xi_k^{*n}(c_{p_0}) C \varphi_k^n$$

这里, $\{\lambda_k^n, \varphi_k^n\}$ 为算子 A_n 的特征解, $\psi_k^n = (\eta_k^{*n}, \xi_k^{*n})^T$ 为 A_n^* 相应于 λ_k^n 的特征向量。

若 $y_n(t) = y(t)$, 则有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k t) \overline{\xi_k^*}(c_{p_0}) \varphi_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k^n t) \overline{\xi_k^{*n}}(c_{p_0}) \varphi_k^n$$

上式两边与 ψ_k^n 作内积得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k t) \overline{\xi_k^*}(c_{p_0}) \langle \psi_k^n, \varphi_k \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_k^n t) \overline{\xi_k^{*n}}(c_{p_0})$$

注意到 $\overline{\xi_k^*}(c_{p_0}) \neq 0$, 由 Dirichlet 序列表示惟一性知

$$\lambda_k^n \in \{\lambda_k\} \quad \xi_k^{*n}(c_{p_0}) \neq 0$$

否则将有 $\langle \psi_k^n, \varphi_k \rangle = 0 (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$, 从而 $\psi_k^n = 0$, 这与 ψ_k^n 为特征向量矛盾。

进而可设存在 k' 使得 $\lambda_{k'}^n = \lambda_{k'}$, 易得

$$\langle \psi_{k'}^n, \varphi_k \rangle = 0 (k \neq k') \text{ 而 } \langle \psi_{k'}^n, \varphi_{k'} \rangle = 1$$

下将 ψ_k^n 按 $\{\psi_k\}$ 展开有

$$\psi_k^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \varphi_k, \psi_k^n \rangle \psi_k = \langle \varphi_{k'}, \psi_k^n \rangle \psi_{k'} = \psi_{k'}$$

从而得出 $\lambda_{k'}^n = \lambda_{k'}$, $\psi_k^n = \psi_{k'}$; 适当排列后有 $k' = k$, 且由 k 的任意性知

$$\lambda_k^n = \lambda_k \quad \psi_k^n = \psi_k$$

将 φ_k^n 按 $\{\varphi_k\}$ 展开有

$$\varphi_k^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_k, \varphi_k^n \rangle \varphi_k = \varphi_k$$

而 $A_n \varphi_k = A_n \varphi_k^n = \lambda_k^n \varphi_k^n = \lambda_k \varphi_k$. 将状态空间任意元

$z \in H_E$ 按 $\{\varphi_k\}$ 展开得 $z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_k, z \rangle \varphi_k$, 下计算

$$(A_n - A)z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_k, z \rangle \langle A_n \varphi_k - A \varphi_k \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_k, z \rangle \langle \lambda_k \varphi_k - \lambda_k \varphi_k \rangle = 0$$

故 $A_n = A$, 从而系统 $s = (A, B, C)$ 是完全可辨识的. 证毕。

定理 2 揭示了分布式测量的挠性体系统的完全可辨识性与控制器的选取有密切的关系。由于

$\xi_k^*(c_{p_0}) \neq 0$ 与 $\psi_k(c_{p_0}) \neq 0$ 等价 ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), 因此若控制点中至少有一点与共轭系统的模态零点不重合, 则系统就是完全可辨识的; 反之若系统完全可辨识, 则控制器配置点中至少有一个与共轭系统任意模态零点不重合, 结合文 [4] 知系统一定是近似可控的; 由于系统敏感器是分布式观测器, 因此系统一定是可观的。所以对分布式观测的挠性结构系统来说, 它的完全可辨识性完全由控制点的配置所决定。

3 示 例

利用本文主要结果, 研究文 [4] 给出的具有“渐近频率阻尼”的 Euler-Bernoulli 梁纵向振动的可辨识问题。

取控制点为 $c_1, c_2, \dots, c_p, 0 \leq c_i \leq r (i = 1, \dots, p)$ 。

(1) 对点观测器, 即 q 观测点分别置于 $s_1, s_2, \dots, s_q$ 处, $0 \leq s_j \leq r (j = 1, 2, \dots, q)$, 根据本文定理 1 知, 若当

$$\begin{cases} \zeta_k(c_i) \neq 0 & (k = 1, 2, \dots), \\ \zeta_k(s_j) \neq 0 & (i = 1, 2, \dots, p), \\ & (j = 1, 2, \dots, q) \end{cases}$$

则系统是部分可辨识的, 其中 ζ_k 为梁振动的模态解表达式^[4]。

(2) 对分布式观测器, 即系统状态方程中的输出算子 $C = [I, 0]$, 根据本文定理 2 知, 当 p 个控制器配置点中至少有一个, 不妨设为第 p_0 个, 使得

$$\zeta_k(c_{p_0}) \neq 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

则系统是完全可以辨识的。

参考文献:

- [1] BANKS S P. State-space and frequency-domain methods in the control of distributed parameter systems[M]. London: Peter Peregrinus Ltd, 1983.
- [2] CURTAIN R, PRITCHARD A. Infinite dimensional system theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [3] NURRE G S, RYAN R S, SCOFIELD H N, et al. Dynamics and control of large space structure[J]. J Guid Contr Dynam, 1984, 7(5): 514-526.
- [4] 徐建国, 贾军国. 函数空间多体挠性结构系统动力学、稳定性与控制的研究[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(12): 1267-1279.

Indentifiability of Dynamical System
of Flexible Space Structure

XU Jian guo

(Department of Information Science and Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China)

Abstract: The indentifiability of the system of flexible space structures is studied. According to the basic behavior of the infinite dimensional dynamical system, the sufficient condition and necessary condition of the indentifiability are obtained under two modes of the observer by means of the functional space analysis. The comparison between the conditions of controllability and observability is done.

Key words: flexible structural system; indentifiability; functional space method

(上接第 14 页)

Polynomial Solution to Delaminated Sandwich Beams in Additional State

LIU Zuo qiu¹, FU Ming hui²

(1. Department of Earth Science, Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Applied Mechanics and Engineering,

Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The stress /strain state of the delaminated sandwich beams is decomposed into two states: basic state and additional state. The additional state of delaminated sandwich beams is investigated using the theory of high order shear deformation. Differential equations of delaminated and undelaminated sectors are formulated and the polynomial solution to additional state is obtained. The actual example also shows that the polynomial solution above is precise in the whole beam domain except the transitional area.

Key words: sandwich beam; delamination; additional state