

赋范空间上等度连续算子族的一致有界性^{*}

刘玉波

(天津理工学院基础教育学院, 天津 300400)

摘 要: 先给出赋 β -范空间上有界可加算子的范数, 然后讨论了非局部有界的赋范空间上等度连续算子族的一致有界性问题, 得出在一般赋范空间上等度连续算子族一致有界性的几个结果, 从而把共鸣定理由赋 β -范空间推广到一般非局部有界的赋范空间上。

关键词: 等度连续; 赋范空间; 拟有界

中图分类号: O177.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 04-0020-03

关于共鸣定理的研究已有许多好的结果^[1-3], 但在非局部有界的赋范空间 (即不可赋 β -范的空间) 的讨论较少。本文在一般的赋范空间上讨论了等度连续算子族的一致有界性问题, 得出了几个一致有界性的结果。

1 β 赋范空间上有界可加算子的范数

在赋范空间上的可加算子 A , 其范数可定义为^[1]

$$\|A\| = \inf\{\alpha \mid \|A(x)\|_1 \leq \alpha \|x\|, \forall x \in E\}$$

对于赋范空间上的有界线性算子, 其范数^[1]

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$$

而对于赋 β -范数空间上的可加算子也有上面的结论。

定理 1 设 A 是赋 β -范数空间 E 到 β -范数空间 E_1 内的可加有界算子 (E, E_1 的范数均简记为 $\|\cdot\|$), 则

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$$

证明 由于赋范空间上的可加算子 A 连续等价于 A 是有界算子^[1], 又由于赋 β -范空间的任何原心球是有界集, 所以单位闭球 $B(\theta, 1)$ 是有界集, 再由 A 是有界的, 故可设

$$\|A(x)\| \leq \rho \quad \forall x \in B(\theta, 1) \quad (\rho > 0, \text{常数})$$

$\forall x \neq \theta$, 则 $\|x\| > 0$, 从而存在有理数列 $r_n > 0$, 使得 $r_n \downarrow \|x\| (n \rightarrow \infty)$ 。

$$\text{所以} \quad \left\| \frac{x}{r_n} \right\| \leq 1, \quad \rho \geq \frac{1}{r_n} \|A(x)\|$$

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, 有 } \rho \geq \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$$

$$\text{从而有} \quad \|A(x)\| \leq \rho \|x\|$$

即 A 是强有界算子。所以

$$\{\alpha \mid \|A(x)\| \leq \alpha \|x\|, \forall x \in E\} \neq \emptyset,$$

$$\|A\| = \inf\{\alpha \mid \|A(x)\| \leq \alpha \|x\|, \forall x \in E\}$$

存在, 且 $\|A\| \leq \rho$ 。

由 $\|A\|$ 的定义,

$$\forall x \in E, \|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\text{所以} \quad \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| \leq \|A\|$$

$$\text{现证} \quad \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$$

$$\text{令} \quad \|A\|_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$$

$$\text{下证明} \quad \|A\|_1 \geq \|A\|$$

$\forall x \neq \theta$, 则 $\|x\| > 0$, 从而存在有理数列 $r'_n > 0$, 使得 $r'_n \rightarrow \|x\|^{\frac{1}{\beta}} (n \rightarrow \infty)$, 故有 $r'_n \rightarrow \|x\| (n \rightarrow \infty)$ 。由于可加算子对有理数具有齐性, 所以有

$$\|A(x)\| = \left\| A \left(r'_n \frac{x}{r'_n} \right) \right\| = r'^{\beta}_n \left\| A \left(\frac{x}{r'_n} \right) \right\| \quad (1)$$

由于 $\|A(x)\|$ 是连续的, 令 $n \rightarrow \infty$, 由 (1) 式

$$\text{有} \quad \|A(x)\| = \|x\| \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|^{\frac{1}{\beta}}} \right) \right\|, \text{从而}$$

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|^{\frac{1}{\beta}}} \right) \right\| \quad (2)$$

由 (2) 式,

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| = \sup_{x \neq \theta} \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|^{\frac{1}{\beta}}} \right) \right\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$$

$$\text{所以} \quad \|A\|_1 \geq \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}, \quad \forall x \neq \theta$$

$$\text{从而} \quad \|A(x)\| \leq \|A\|_1 \|x\| \quad (\forall x \in E)$$

* 收稿日期: 2001-12-18

作者简介: 刘玉波 (1955-), 男, 副教授; E-mail: lyb123@eyou.com

由 $\|A\|$ 的定义有 $\|A\| \leq \|A\|_1$, 故 $\|A\| = \|A\|_1$, 即

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$$

令 $\|A\|_2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$

由于 $\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\| (\forall x \in E)$

所以 $\sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| \leq \|A\|$

从而 $\|A\|_2 \leq \|A\|$

反之, $\|A\|_2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| \geq$

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| = \|A\|_1 = \|A\|$$

即 $\|A\|_2 = \|A\|$

2 等度连续算子族的一致有界性

定义 1^[4] 设 E 是拓扑线性空间, $M \subset E$, 如果对 θ 的任意邻域 U , 对应存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\lambda| < \delta$ 时, $\lambda M \subset U$, 则称 M 是 (拓扑) 有界的。

引理 1^[4] 设 E 是拓扑线性空间, $M \subset U$, 那么 M 是有界集的充要条件是 $\forall \{x_n\} \subset M$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \theta$$

定义 2 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ 是赋准范空间 E 到赋准范空间 E_1 内的连续有界算子族, 如果 $\forall \epsilon > 0 (0 < \epsilon \leq 1)$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in E$, 当 $\|x\| < \delta$ 时, $\|A_\lambda(x)\|_1 < \epsilon$, $\forall \lambda \in \Delta$; 则称 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ 是等度连续算子族。

例 1 设 E 是赋准范空间, 在其上定义泛函, $p_\alpha(x) = \|x\|^\alpha (\alpha > 0)$, $p_\alpha(x)$ 是 $2^{[q]}$ -次加泛函^[3], 并且 $p_\alpha(x)$ 是连续泛函。令 $\Delta = [\lambda_0, 1] (0 < \lambda_0 < 1)$, 则 $\{p_\alpha(x)\}_{\alpha \in \Delta}$ 是等度连续的。

事实上, 对 E 中任意有界集 M , $p_\alpha(M) \subset \mathbf{R}$, $\forall \{y_n\} \subset p_\alpha(M)$, 存在 $\{x_n\} \subset M$, 使

$$y_n = p_\alpha(x_n),$$

$$\begin{aligned} \frac{y_n}{n} &= \frac{1}{n} \|x_n\|^\alpha = \frac{1}{n} \left\| n \frac{1}{n} x_n \right\|^\alpha \leq \\ &= \frac{1}{n} \left(n \left\| \frac{1}{n} x_n \right\| \right)^\alpha = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \left\| \frac{x_n}{n} \right\| \end{aligned}$$

因 M 是有界的, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \theta$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{n} = 0$$

由引理 1 可知 $p_\alpha(M)$ 是有界的; 由有界算子的定义, 可知 p_α 是有界的, $\forall \alpha \in \Delta$ 。

$\forall \epsilon > 0 (0 < \epsilon < 1)$, 取

$$\delta = \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}, \forall x \in E$$

当 $\|x\| < \delta$ 时

$$p_\alpha(x) = \|x\|^\alpha < \delta^\alpha = \epsilon^{\frac{\alpha}{\alpha}} \leq \epsilon (\forall \alpha \in \Delta)$$

所以, $\{p_\alpha(x)\}_{\alpha \in \Delta}$ 是等度连续的。

引理 2^[4] 设 E 是赋准范空间, M 是 E 中 (拓扑) 有界集。则 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbf{N}$, 使 $n \geq n_0$ 时

$$\left\| \frac{1}{n} x \right\| < \epsilon, \quad \forall x \in M$$

定义 3^[4] 设 E 是拓扑线性空间, $M \subset E$, 如果对 θ 的任意邻域 U , 对应存在正整数 n , 使得 $M \subset U + U + \dots + U$ (n 项), 则称 M 是 (拓扑) 拟有界的。

例 2 设 $S[a, b]$ 是所有实可测的概有界函数的全体集合, 在其上定义准范数

$$\|x\| = \int_a^b \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|} dt, \quad \forall x \in S[a, b]$$

则 $S[a, b]$ 是完备的赋范空间^[2, 4]。 $S[a, b]$ 是无界的拓扑空间, 但 $S[a, b]$ 的任意子集均是拟有界的, 所以 $S[a, b]$ 也是拟有界的 (其证明参考文 [4])。

由有界集和拟有界集的定义, 或由文 [5] 的有界集及拟有界集的定义, 易得: 有界集一定是拟有界的。

定理 2 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ 是赋准范空间 E 到赋准范空间 E_1 内的可加等度连续的算子族。那么对 E 中任意拟有界集 M , 均一致地有

$$\sup_{\lambda \in \Delta} \sup_{x \in M} \|A_\lambda(x)\|_1 < \infty$$

($\|\cdot\|_1$ 为 E_1 的赋准范数)

证明 因为 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ 是等度连续的, 所以 $\forall \epsilon_0 (0 < \epsilon_0 \leq 1)$, 对应存在 $\delta_0 > 0$, 当 $\|x\| < \delta_0$ 时 ($x \in E$),

$$\sup_{\lambda \in \Delta} \sup_{\|x\| < \delta_0} \|A_\lambda(x)\|_1 < \epsilon_0$$

对 $\delta_0 > 0$, 做球

$$B(\delta_0) = \{x \mid \|x\| < \delta_0, x \in E\}$$

由于 M 是拟有界集, 对应存在正整数 n_0 , 使 $M \subset B(\delta_0) + \dots + B(\delta_0)$ (n_0 项), $\forall x \in M$, 存在

$$y_1, y_2, \dots, y_{n_0} \in B(\delta_0)$$

使

$$x = \sum_{k=1}^{n_0} y_k,$$

$$\|A_\lambda(x)\|_1 \leq \sum_{k=1}^{n_0} \|A_\lambda(y_k)\|_1 \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n_0} \epsilon_0 = n_0 \epsilon_0, \quad \forall \lambda \in \Delta$$

即 $\|A_\lambda(x)\|_1 \leq n_0 \epsilon_0, \forall \lambda \in \Delta$

所以 $\sup_{x \in M} \|A_\lambda(x)\|_1 \leq n_0 \epsilon_0, \forall \lambda \in \Delta$

从而 $\sup_{\lambda \in \Delta} \sup_{x \in M} \|A_\lambda(x)\|_1 \leq n_0 \epsilon_0 < \infty$

在定理 2 中, 如果 E 是拟有界的, 则

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{x \in E} \|A_{\lambda}(x)\|_1 < \infty$$

由定理 2 可直接推出下面的 2 个推论。

推论 1 设 $\{A_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是赋范空间 E 到赋范空间 E_1 内的可加等度连续的算子族。那么对 E 中任意有界集 M , 均一致地有

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{x \in M} \|A_{\lambda}(x)\|_1 < \infty$$

由于赋 β -范空间的任何原心球都是有界集, 所以应用定理 2 可得推论 2。

推论 2 设 $\{A_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是赋 β -范空间 E 到赋范空间 E_1 内的可加等度连续的算子族。那么对任意 $r > 0$, 均一致地有

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\|x\|_{\beta} \leq r} \|A_{\lambda}(x)\|_1 < \infty$$

特别地, 当 E_1 是赋 β -范空间时, 则

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_{\lambda}\|_1 < \infty$$

推论 2 后半部分, 由定理 1 是显然的。

引理 3^[1] 设 E 是赋范空间, $p(x)$ 为 E 上 γ -拟次加泛函, 则对任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$

$$p(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \gamma^k p(x_k) + \gamma^n p(x_n)$$

定理 3 设 $\{A_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是赋范空间 E 到赋范空间 E_1 内的按范 γ -拟次加的等度连续的算子族^[1,3]。那么对 E 中任意拟有界集 M , 均一致地有

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{x \in M} \|A_{\lambda}(x)\|_1 < \infty$$

证明 因为 $\{A_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是等度连续的, 所以 $\forall \epsilon_0 > 0 (0 < \epsilon_0 \leq 1)$, 对应存在 $\delta_0 > 0$, 当 $\|x\| < \delta_0$ 时($x \in E$),

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\|x\| \leq \delta_0} \|A_{\lambda}(x)\|_1 < \epsilon_0$$

对 δ_0 做球

$$B(\delta_0) = \{x \mid \|x\| < \delta_0, x \in E\}$$

由于 M 是拟有界集, 由定义, 对应有正整数 n_1 , 使

$$M \subset B(\delta_0) + \dots + B(\delta_0) \quad (n_1 \text{ 项})$$

$\forall x \in M$, 存在

$$y_1, y_2, \dots, y_{n_1} \in B(\delta_0)$$

使 $x = \sum_{k=1}^{n_1} y_k$ 。 $\forall \lambda \in \Lambda$, 由于 A_{λ} 按范 γ -拟次加的^[1,3], 由定义 $\forall x', y' \in E$

$$\|A_{\lambda}(x' + y')\| \leq \gamma[\|A_{\lambda}(x')\| + \|A_{\lambda}(y')\|]$$

由引理 3,

$$\left\|A_{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n_1} y_k\right)\right\|_1 \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} \gamma^k \|A_{\lambda}(y_k)\|_1 + \gamma^{n_1-1} \|A_{\lambda}(y_{n_1})\|_1 \leq \sum_{k=1}^{n_1-1} \gamma^k \epsilon_0 + \gamma^{n_1-1} \epsilon_0 = \left[\sum_{k=1}^{n_1-1} \gamma^k + \gamma^{n_1-1}\right] \epsilon_0$$

所以

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{x \in M} \|A_{\lambda}(x)\|_1 \leq \left[\sum_{k=1}^{n_1-1} \gamma^k + \gamma^{n_1-1}\right] \epsilon_0 < \infty$$

由于赋 β -范空间的任意原心球都是有界集, 所以由定理 3 可直接得出下面的推论。

推论 3 设 $\{A_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是赋 β -范的空间 E 到赋范空间 E_1 内的按范 γ -拟次加的等度连续算子族。那么, 对任意 $r > 0$, 均一致地有

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\|x\|_{\beta} \leq r} \|A_{\lambda}(x)\|_1 < \infty$$

参考文献:

- [1] 定光桂. 泛函分析选讲[M]. 天津: 南开大学出版社, 1992: 1-90, 175-190.
- [2] DING G G. The uniform boundness principle in some topological vector groups[J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 2000, B(3): 292-301.
- [3] 定光桂. 巴拿赫空间引论[M]. 北京: 科技出版社, 1999: 228-241.
- [4] 定光桂. 拓扑线性空间[M]. 南宁: 广西出版社, 1987: 23-60.
- [5] RUDIN W. Functional analysis[M]. New York: McGraw Hill Inc, 1973: 1-36.

About Uniform Boundness of Equicontinuous Operator Family in Quasi-Normed Space

LIU Yu to

(Base Education College, Tianjin Institute of Technology, Tianjin 300400, China)

Abstract: A norm of the bounded additive operator in the β normed space is derived. Then, the uniform boundness of equicontinuous operator family in nonlocal bound quasi normed space is discussed and several results are obtained about the uniform boundness of equicontinuous operator family in common quasi normed space. Therefore the resonance theorem is extended from β normed space to common nonlocal bound quasi normed space.

Key words: equicontinuous; quasi normed space; quasi bound