

三维 Lotka-Volterra 系统的积分不变量^{*}

王远世, 吴红, 朱思铭

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 使用 Darboux 方法, 通过坐标平面及二次多项式曲面构造出三维 Lotka-Volterra 系统 (LVS) 的积分不变量, 改进了已有关于二维 LVS 积分不变量的结论。利用此积分不变量, 对三维捕食被捕食 LVS 解的渐近性进行讨论, 得到了平衡点全局渐近稳定的新条件, 推广了已有 LVS 正平衡点全局渐近稳定的结论。

关键词: Lotka-Volterra; 积分不变量; 捕食被捕食; 全局渐近稳定性

中图分类号: O175.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 02-0012-04

考虑三维捕食被捕食系统

$$\begin{aligned}x' &= x(a - y - dx - \alpha x) \\y' &= y(-b + x + ez - \alpha_1 y) \\z' &= z(-c + d_1 x - e_1 y - \alpha_2 z)\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $a, b, c, d, d_1, e, e_1, \alpha > 0; \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ 。由于 $x = 0, y = 0, z = 0$ 均为系统 (1) 的不变曲面, 且种群数 $x, y, z \geq 0$, 故本文对于系统 (1) 的讨论均在 $\mathbf{R}_+^3 = \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$ 中进行。

1 Darboux 方法与三维 LVS 的积分不变量

考虑一般的三维系统

$$\begin{aligned}x' &= P(x, y, z), y' = Q(x, y, z), \\z' &= R(x, y, z)\end{aligned}\quad (2)$$

其中, P, Q, R 为其变量的多项式函数。

定义^[1] 称函数 $I = I(x, y, z, t)$ 为系统 (2) 的积分不变量, 如果对系统 (2) 的任一解 $(x(t), y(t), z(t))$, $I(x(t), y(t), z(t), t)$ 是个常数。

当定义中的 I 不含 t 时, I 即为系统 (2) 的首次积分: 即使 I 中含有 t , 以下将会看到, 这样的积分不变量对于讨论系统 (2) 的解的渐近性态是有效的。用 Darboux 方法构造系统 (2) 的积分不变量, 是基于求一对多项式函数 $(f(x, y, z), k(x, y, z))$, 使得

$$\frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q + \frac{\partial}{\partial z} R = kf \quad (3)$$

引理 1 设 $f(x, y, z)$ 是满足条件 (3) 的多项式函数, 则曲面 $f(x, y, z) = 0$ 系统 (2) 的不变曲面。

证明 在曲面 $S: f(x, y, z) = 0$ 上的任一点 (x, y, z) , 由式 (3), 有 $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(P, Q, R)$

$= 0$, 即曲面 S 任一点处的法向量与系统 (2) 的方向场垂直, 故 S 为不变曲面, 证毕。

若能求得对 $(f_i, k_i), i = 1, \dots, N$, 则可设系统 (2) 具有积分不变量

$$I = \prod_{i=1}^N f_i^{\lambda_i}(x, y, z) e^{st} \quad (4)$$

其中, λ_i, s 为待定系数。于是由式 (2), 有:

$$s + \sum_{i=1}^N \lambda_i k_i(x, y, z) = 0 \quad (5)$$

由于 k_i 为多项式, 故由方程 (5) 求解待定系数 λ_i, s , 归结为求解一个线性方程组, 且待定系数 s 可以看作仅仅是起调节作用的。记 $m = \max\{\deg P, \deg Q, \deg R\}$, 即 m 为多项式 P, Q, R 的最高次数, 由式 (3) 知 k_i 的次数最高为 $m-1$, 与 f_i 的选择无关。于是 (5) 式左边最多有 $M = m(m+1)(m+2)/6$ 项。若要求得 λ_i 的非零解, 即求得 $M-1$ 个齐次线性方程组的非零解, 最多需要 M 对 (f_i, k_i) , 故有

引理 2 若存在 M 个多项式对 (f_i, k_i) 满足条件 (3), 则系统 (2) 存在积分不变量

$$I = \prod_{i=1}^N f_i^{\lambda_i}(x, y, z) \exp(st)$$

其中, λ_i, s 为待定系数。

引理 3 若存在 $M+1$ 对满足 (3) 式的 (f_i, k_i) , 则系统 (2) 存在首次积分

$$I = \prod_{i=1}^N f_i^{\lambda_i}(x, y, z)$$

其中, λ_i 为待定系数, 由 (5) 式确定 (取 $s = 0$)。

具体到一般的三维 LVS:

$$\begin{aligned}x' &= x(r_1 + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) \\y' &= y(r_2 + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) \\z' &= z(r_3 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)\end{aligned}\quad (6)$$

* 收稿日期: 2001-05-25

由 (3) 式不难解得其相应的 (f_i, k_i) 对有：

$$\begin{aligned} & (x, r_1 + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z), \\ & (y, r_2 + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z), \\ & (z, r_3 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) \end{aligned} \tag{7}$$

一般地，若 f 具有线性形式：

$$\begin{aligned} f &= f_{00} + f_{01}x + f_{02}y + f_{03}z, \\ k &= k_{00} + k_{01}x + k_{02}y + k_{03}z \end{aligned} \tag{8}$$

将 (8) 式代入条件 (3)，求解方程 (5)，即可得文 [2, p2442—2445] 关于三维 LVS 积分不变量的所有结论，但过程比文 [3] 更简易。

若 f 为二次多项式，即设

$$\begin{aligned} f &= f_{000} + f_{100}x + f_{010}y + f_{001}z + f_{110}xy + \\ & f_{011}yz + f_{101}xz + f_{200}x^2 + f_{020}y^2 + f_{002}z^2 \\ k &= k_{000} + k_{100}x + k_{010}y + k_{001}z \end{aligned} \tag{9}$$

将式 (9) 代入条件 (3)，取 $k_{000} = 0$ ，得：

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= \left[1 + \frac{a_{11}x}{r_1}\right]^2 + \frac{a_{22}y}{r_2} + \frac{a_{33}z}{r_3}, \\ k_1(x, y, z) &= 2a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z \end{aligned}$$

设系统 (6) 存在积分不变量 $I(x, y, z, t) = x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3}f_1e^{st}$ 由方程 (5)，有解 $\lambda_1 = -s/r_1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = s/(2r_1)$ ，于是有：

定理 1 若下列条件成立：

$$\begin{aligned} & r_1r_2r_3a_{11} \neq 0, a_{22} = 2a_{12}, a_{33} = 2a_{13}, \\ & a_{21} = a_{11}\left[2 + \frac{r_2}{r_1}\right], a_{31} = a_{11}\left[2 + \frac{r_3}{r_1}\right], \\ & a_{22}r_3(a_{33} - a_{23}) = a_{33}r_2(a_{32} - a_{22}) \end{aligned}$$

则系统 (6) 存在满足条件 (3) 的多项式对：

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= \left[1 + \frac{a_{11}x}{r_1}\right]^2 + \frac{a_{22}y}{r_2} + \frac{a_{33}z}{r_3} \\ k_1(x, y, z) &= 2a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z \end{aligned}$$

且存在积分不变量

$$I(x, y, z, t) = x^{-2}\left[\left[1 + \frac{a_{11}x}{r_1}\right]^2 + \frac{a_{22}y}{r_2} + \frac{a_{33}z}{r_3}\right]e^{2r_1t}$$

推论 1 在定理 1 的条件下，若系统 (6) 存在空间周期解，则此空间周期解必落在曲面 $f_1(x, y, z) = 0$ 上。

证明 若系统 (6) 存在空间周期解 $(x(t), y(t), z(t))$ ，其周期为 $T, T > 0$ ，则由定理 1，有 $x(t)^{-2}f_1(x(t), y(t), z(t))e^{2r_1t} = C, x(t+T)^{-2}f_1(x(t+T), y(t+T), z(t+T))e^{2r_1(t+T)} = C$ 其中， C 为常数。由 $r_1 \neq 0$ ，知 $C = 0$ ，故 $f_1(x(t), y(t), z(t)) = 0$ ，证毕。

定理 2 若成立下列条件

$$\begin{aligned} & r_1r_2r_3a_{11} \neq 0, r_1 + r_2 + r_3 = 0, a_{ij} - a_{ji} \\ & = a_{ij}(r_i + r_j)/r_j, i \neq j, i, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

则系统 (6) 存在满足条件 (3) 的多项式对：

$$\begin{aligned} f_2(x, y, z) &= \left[1 + \frac{a_{11}x}{r_1} + \frac{a_{22}y}{r_2} + \frac{a_{33}z}{r_3}\right]^2 - \\ & 4\left[\frac{a_{11}a_{22}xy}{r_1r_2} + \frac{a_{11}a_{33}xz}{r_1r_3} + \frac{a_{22}a_{33}yz}{r_2r_3}\right] \\ k_2(x, y, z) &= 2a_{11}x + 2a_{22}y + 2a_{33}z \end{aligned}$$

且存在首次积分

$$I(x, y, z, t) = x^{-1}y^{-1}z^{-1}f_2(x, y, z)^2$$

将定理 2 的讨论限制在二维 LVS：

$$\begin{aligned} x' &= x(r_1 + a_{11}x + a_{12}y), \\ y' &= y(r_2 + a_{21}x + a_{22}y) \end{aligned}$$

有以下推论 2。

推论 2 若下列条件成立：

$$\begin{aligned} & r_1r_2a_{11} \neq 0, r_1 + r_2 = 0, \\ & a_{ij} - a_{ji} = a_{ij}(r_i + r_j)/r_j, i \neq j, i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

则二维 LVS 存在多项式对：

$$\begin{aligned} f^*(x, y) &= \left[1 + \frac{a_{11}x}{r_1} + \frac{a_{22}y}{r_2}\right]^2 - \frac{4a_{11}a_{22}xy}{r_1r_2} \\ k^*(x, y) &= 2a_{11}x + 2a_{22}y \end{aligned}$$

且存在 2 个积分不变量

$$\begin{aligned} I(x, y, t) &= x^{-2}f^*(x, y)\exp(-2r_1t), \\ y^{-2}f^*(x, y)\exp(-2r_1t) \end{aligned}$$

定理 3 若成立下列条件

$$\begin{aligned} & r_1r_2r_3a_{11} \neq 0, r_1 + r_3 = 0, a_{11} = a_{31}, \\ & a_{22} = 2a_{12} = 2a_{32}, a_{33} = a_{13}, \\ & a_{2j} = a_{ij}(r_2 + 2r_j)/r_j, j = 1, 3 \end{aligned}$$

则系统 (6) 存在满足条件 (3) 的多项式对：

$$\begin{aligned} f_3(x, y, z) &= 1 + \frac{2a_{11}x}{r_1} + \frac{a_{22}y}{r_2} + \frac{2a_{33}z}{r_3} + \\ & \left[\frac{a_{11}x}{r_1}\right]^2 + \left[\frac{a_{22}y}{r_2}\right]^2 + \left[\frac{a_{33}z}{r_3}\right]^2, \\ k_3(x, y, z) &= 2a_{11}x + a_{22}y + 2a_{33}z \end{aligned}$$

且存在 2 个积分不变量

$$I(x, y, z, t) = x^{-2}f_3(x, y, z)e^{2r_1t}, z^{-2}f_3(x, y, z)e^{2r_3t}$$

推论 3 在定理 3 的条件下，若系统 (6) 存在空间周期解，则此空间周期解必落在曲面 $f_3(x, y, z) = 0$ 上。

定理 4 若成立下列条件

$$\begin{aligned} & r_1r_2r_3a_{11} \neq 0, a_{23} = a_{32} = 0, a_{11} = a_{21} + a_{31}, \\ & a_{11}r_i(a_{ii} - a_{1i}) + a_{ii}r_1(a_{11} - a_{i1}) = 0, i = 2, 3 \end{aligned}$$

则系统 (6) 存在满足条件 (3) 的多项式对：

$$\begin{aligned} f_4(x, y, z) &= 1 + \frac{a_{11}x}{r_1} + \frac{a_{22}y}{r_2} + \\ & \frac{a_{33}z}{r_3} + \frac{a_{22}a_{33}yz}{r_2r_3}, \\ k_4(x, y, z) &= a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z \end{aligned}$$

且存在积分不变量

$$I(x,y,z,t)=y^{-1}z^{-1}f_4(x,y,z)e^{(r_2+r_3)t}$$

易见当 $r_2+r_3=0$ 时, 此时系统 (6) 存在首次积分 $I(x,y,z)=y^{-1}z^{-1}f_4(x,y,z)$ 。

推论 4 在定理 4 的条件下, 当 $r_2+r_3\neq 0$ 时, 若系统 (6) 存在空间周期解, 则此空间周期解必落在曲面 $f_4(x,y,z)=0$ 上。

定理 5 若成立下列条件

- 1) $r_1=r_2=r_3$
- 2) $(a_{ij}-a_{ji})^2a_{ii}=(a_{kj}-a_{jk})^2a_{kk},$
 $(i-j)(j-k)(k-i)\neq 0,i,j,k=1,2,3$
- 3) $3a_{ll}a_{hh}+a_{hl}a_{hl}-2a_{ll}a_{hh}-2a_{hh}a_{hl}=0,$
 $l<h,l,h=1,2,3$
- 4) $f_{10}(a_{13}+a_{23}-2a_{33})+f_{101}(a_{12}+a_{32}-2a_{22})+f_{011}(a_{31}+a_{21}-2a_{11})=0,$
 $f_{110}=2a_{11}a_{22}(a_{21}-a_{11})(a_{22}-a_{12}),$
 $f_{101}=2a_{11}a_{33}(a_{31}-a_{11})(a_{33}-a_{13}),$
 $f_{011}=2a_{22}a_{33}(a_{22}-a_{32})(a_{23}-a_{33})$

则系统 (6) 存在满足条件 (3) 的多项式对:

$$f_5(x,y,z)=r_1[a_{22}(a_{21}-a_{11})^2x+a_{33}(a_{32}-a_{22})^2y+a_{11}(a_{13}-a_{33})^2z]+a_{11}a_{22}(a_{21}-a_{11})^2x^2+a_{22}a_{33}(a_{32}-a_{22})^2y^2+a_{33}a_{11}(a_{13}-a_{33})^2z^2+f_{110}xy+f_{101}xz+f_{011}yz$$

$$k_5(x,y,z)=r_1+2a_{11}x+2a_{22}y+2a_{33}z$$

且当 $\det B=0$ 时, 系统 (6) 存在首次积分

$$I(x,y,z)=x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3}f_5^{\lambda_4}$$

其中, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)^T$ 为线性方程组 $B\lambda=0$ 的非零解,

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a_{11}&a_{21}&a_{31}&2a_{11}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}&2a_{22}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}&2a_{33}\end{pmatrix}$$

2 系统 (1) 解的渐近性态

定理 6 若成立下列条件

$$\alpha(c-2a)=ad_1,\alpha(b-2a)=a,$$
$$\alpha_2=2d,\alpha_1=2$$

则系统 (1) 的任一解 $(x(t),y(t),z(t))$, 必有 $(x(t),y(t),z(t))\rightarrow(a/\alpha,0,0),t\rightarrow+\infty$ 时。

证明 对系统 (1) 的任一解 $(x(t),y(t),z(t))$, 由 $x'=x(a-y-dz-\alpha x)\leq x(a-\alpha x)$, 故必有 $x(t)$ 当 $t\geq 0$ 时有界。又由定理 1 知, 此时解 $(x(t),y(t),z(t))$ 必满足 $(1-\alpha x/a)^2+\alpha_1y/b+\alpha_2z/c=Cx^2e^{-2at}$, 其中, C 为常数。在上式令 $t\rightarrow+\infty$ 有: $x(t)\rightarrow a/\alpha,y(t)\rightarrow 0,z(t)\rightarrow 0$, 证毕。

引理 4^[3] 若 $c\alpha e<d(ae+c-bd)<bd\alpha e$, 则存在 $\delta>0,\delta$ 充分小, 当 $\delta>\alpha_1\geq 0,\delta>\alpha_2\geq 0,\delta>|d-d_1|,\delta>|e-e_1|$ 时, 系统 (1) 存在惟一的正平衡点。

定理 7 若 $c\alpha e<d(ae+c-bd)<bd\alpha e,e=e_1$, 则存在 $\delta>0(\delta<\hat{\delta})$, 当 $\delta>\alpha_1\geq 0,\delta>\alpha_2>0,\delta>|d-d_1|,\delta>|e-e_1|$ 时, 系统 (1) 存在惟一的正平衡点 (x_0,y_0,z_0) , 且对上述 α_2 , 存在 $\hat{\delta}>0(\hat{\delta}<\hat{\delta})$, 当 $|d-d_1|<\hat{\delta}$ 时, (x_0,y_0,z_0) 在 R^3 全局渐近稳定。

证明 作替换 $x_1=x-x_0,y_1=y-y_0,z_1=z-z_0$, 方程 (1) 变为

$$x_1'=-\alpha(x_1+x_0)(\alpha x_1+y_1+dz_1)$$
$$y_1'=(y_1+y_0)(x_1-\alpha_1y_1+ez_1)$$
$$z_1'=(z_1+z_0)(d_1x_1-e_1y_1-\alpha_2z_1)$$

取 $V(x_1,y_1,z_1)=x_1-x_0\ln(1+x_1/x_0)+y_1-y_0\ln(1+y_1/y_0)+z_1-z_0\ln(1+z_1/z_0)$

则 $V(x_1,y_1,z_1)$ 定正, 无穷大, 且

$$V'(x_1,y_1,z_1)|_{(10)}=(d_1-d)x_1z_1-\alpha x_1^2-\alpha_1y_1^2-\alpha_2z_1^2$$
 (11)

对于 α_2 , 必有 $\hat{\delta}>0(\hat{\delta}<\hat{\delta})$, 当 $|d-d_1|<\hat{\delta}$ 时, (11) 式当 $\alpha_1>0$ 时对 (x_1,y_1,z_1) 定负; (11) 式当 $\alpha_1=0$ 时对 (x_1,y_1,z_1) 常负, 对 (x_1,z_1) 定负。若 $\alpha_1>0$, 则系统 (1) 的正平衡点 (x_0,y_0,z_0) 在 R^3 全局渐近稳定。若 $\alpha_1=0$, 由文 [4, p296] 定理 1.3 知, 方程 (10) 的任一解的 ω -极限集必在集合 H 上: $H=\{(0,y_1,0)|y_1>-y_0\}$, 而在该集中方程 (10) 的解轨线只有零解, 故系统 (1) 的正平衡点 (x_0,y_0,z_0) 在 R^3_+ 全局渐近稳定。证毕。

参考文献:

[1] CAIRO L, FEIX M R, LLIBRE J. Darboux method and search for invariants for the Lotka-Volterra and complex quadratic systems[J]. Math J Phys, 1999, 40: 2074-2091.

[2] CAIRO L, FEIX M R. Families of invariants of the motion for the Lotka-Volterra equations: The linear polynomials family[J]. Math J Phys, 1992, 33(6): 2440-2455.

[3] SEIFERT G. Asymptotic behavior in a three-component food chain model[J]. Nonlinear Anal-theor, 1998, 32(6): 749-753.

[4] HALE J K. Ordinary differential equations[M]. New York: Wiley-Interscience, 1997.

(下转第 18 页)

4 结 论

工业过程通常是一阶和二阶系统, 用状态空间法分析时, 各种迭代学习算法的收敛性条件以矩阵的形式表示, 不太适合于实际应用。同时实际中建立对象数学模型的方法是工程化方法, 这样建立的对象模型大都表示为一阶和二阶传递函数形式。在目前的文献中的研究也是先得到对象的传递函数表示, 然后再化为状态空间表示, 显然是为了利用原先状态空间分析的成果。本文用时频结合的方法给出了设定值变化下的迭代学习算法, 并以系统参数形式地给出几种学习算法的收敛性定理, 得到的结论与状态空间分析方法^[2-4]有极好的对称性, 为迭代学习控制在工业过程控制中的应用提供了条件, 它同样适用于定值控制中。

参考文献:

[1] ALESSANDRO De L, GIORGIO P. A frequency-domain approach to learning control: Implementation for a robot manipulator[J] . IEEE Trans, On Industrial Electronics, 1998, 39 (1): 1—10.
[2] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制[M] . 北京: 国防工业出版社 1999: 174—195.
[3] 于乃润, 万百五. 工业过程稳态优化中的迭代学习控制[J] . 控制理论与应用 1996, 13(6): 717—722.
[4] 于乃润, 万百五. 工业过程稳态优化中的 PID 型迭代学习控制[J] . 西北纺织工学院学报 1998, 12(3): 199—222.
[5] 孙明轩, 黄宝健, 张学智. 任意初态下不确定时滞系统的 PD 型迭代学习控制[J] . 控制理论与应用, 1998, 15 (6): 853—858.

Iterative Learning Control Algorithm and Its Convergence
for Process Control in Engineering Modeling

LUO Zhong liang¹, GAO Chao¹, ZHOU Xian bo², FANG Qing cheng¹

(1. Department of Automation, Foshan University, Foshan Guangdong 528000, China;
2. Lingnan College, Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: As to the method of engineering modeling in process control, the object model here obtained is represented by transfer function. However, the current research is to transfer it as the form of state space, hence, iterative learning algorithm and its convergence conditions are represented by matrix, which doesn't match the practical application. Here, time frequency combination method is applied to obtain the iterative algorithm with the assumed number changing. The convergence theorems for the learning algorithms based on the system parameters are also obtained. In the meantime, the empirical simulation supports the results.

Key words: process control; iterative learning control; convergence

(上接第 14 页)

Invariant of Three-dimensional Lotka-Volterra Systems

WANG Yuan shi, Wu Hong, ZHU Si ming

(College of Mathematics and Computing Science, Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The Darboux method is used to construct integral invariant for 3D Lotka-Volterra systems by quadratic polynomials. The deduced integral invariant is employed to study the 3D predator prey Lotka-Volterra systems and some new results are obtained.

Key words: Lotka-Volterra; invariant; predator prey; global asymptotic stability