

矩阵方程 $XA = YAD$ 的双对称解

吴筑筑¹, 王国荣²

(1. 韶关学院计算机系, 广东 韶关 512005;

2. 上海师范大学数学科学学院, 上海 200234)

摘要: 当 D 为对称矩阵时, 给出矩阵方程 $XA = YAD$ 的对称解偶和双对称解偶 (X, Y) 的一般表达式, 并给出联立方程 $XA = YAD, A^T XA = D$ 有双对称解偶的充要条件以及通解表达式。

关键词: 矩阵方程; 对称矩阵; 双对称矩阵; 广义逆矩阵; 投影算子

中图分类号: O241.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 03-0114-03

用记号 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 表示实 $n \times m$ 矩阵空间, $\mathbf{R}_r^{n \times m}$ 指其中秩为 r 的全体, $\mathbf{O}\mathbf{R}^{n \times n}$ 为 n 阶正交矩阵全体, $\mathbf{S}\mathbf{R}^{n \times n}$ 为 n 阶实对称矩阵全体. $R(A), N(A), A^\dagger$ 分别为矩阵 A 的列空间, 零空间和 Moore-Penrose 逆.

$I(I_n)$ 为单位阵 (n 阶单位阵), O 为零矩阵.

当 s 是向量空间的子空间时 P_s 表示到 s 上的正交投影算子. 本文所论问题是: 已知 $A \in \mathbf{R}^{n \times m}, D \in \mathbf{S}\mathbf{R}^{m \times m}$, 分别求下列方程的双对称解偶 (X, Y):

$$XA = YAD \quad (1)$$

$$XA = YAD, A^T XA = D \quad (2)$$

n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为双对称矩阵是指其满足

$$a_{ij} = a_{ji} = a_{n-j+1, n-i+1}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

当 D 为对角阵时上述问题便是广义特征值反问题.

文 [1] 讨论了方程 (2) 的解 X, Y 分别为对称, 非负定及正定的情形.

下面首先推广文 [1] 定理 4.1 (a) 的结果, 在无须满足 $A^T XA = D$ 的情形下, 讨论方程 (1) 的对称解偶, 将方程 (2) 的对称解偶作为本文定理 1 的特殊情形; 其次, 定理 2 给出方程 (1) 的双对称解偶的表达式, 并在定理 3 进一步给出方程 (2) 存在双对称解偶的充要条件以及通解的表达式.

引理 1^[2] 设 $A, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 则方程 $AX = B, X = X^T$ 相容当且仅当 $AA^\dagger B = B, AB^T = BA^T$. 这时其通解为 $X = A^\dagger B + (I - A^\dagger A)(A^\dagger B)^T + (I - A^\dagger A)Z(I - A^\dagger A), \forall Z \in \mathbf{S}\mathbf{R}^{n \times n}$.

推论 1 设 $A \in \mathbf{R}_r^{n \times m}, u \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}, u^T u = I, R(u) = N(A^T)$, 则方程 $XA = 0, X = X^T$ 的通解是 $X = uGu^T, \forall G \in \mathbf{S}\mathbf{R}^{(n-r) \times (n-r)}$.

定理 1 给定 $A \in \mathbf{R}_r^{n \times m}, D \in \mathbf{S}\mathbf{R}^{m \times m}$. 设 A 的奇异值分解(SVD) 为

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix} V^T = U_1 \Sigma V_1^T \quad (3)$$

这里, $U = [U_1, U_2] \in \mathbf{O}\mathbf{R}^{n \times n}, V = [V_1, V_2] \in \mathbf{O}\mathbf{R}^{m \times m}, U_1, V_1$ 为 r 列, Σ 为正定对角阵, 且设

$$D = P \Lambda P^T = P \text{diag}(\lambda_1 I_{k_1}, \lambda_2 I_{k_2}, \dots, \lambda_l I_{k_l}) P^T \quad (4)$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ 互异, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1}$ 非零,

$$\sum_{j=1}^l k_j = m, P = [P_1, P_2, \dots, P_l] \in \mathbf{O}\mathbf{R}^{m \times m},$$

$$P_j \in \mathbf{R}^{m \times k_j},$$

$$r_j = \text{rank}(V_2^T P_j), R(u_j) = N(V_2^T P_j),$$

$$u_j \in \mathbf{R}^{k_j \times (k_j - r_j)}, u_j^T u_j = I, j = 1, 2, \dots, l$$

则矩阵方程 (1) 有对称解偶 ($X = X^T, Y = Y^T$), 其一般解为

$$\begin{aligned} X &= (A^\dagger)^T CDA^\dagger + U_2 Y_{21} U_1^T ADA^\dagger + \\ &\quad (U_2 Y_{21} U_1^T ADA^\dagger)^T + U_2 X_{22} U_2^T \\ Y &= (A^\dagger)^T CA^\dagger + U_2 Y_{21} U_1^T + \\ &\quad (U_2 Y_{21} U_1^T)^T + U_2 Y_{22} U_2^T \end{aligned} \quad (5)$$

其中,

$$Y_{21} = ZU_1^T [I - ADV_2(ADV_2)^\dagger] U_1,$$

$$\forall Z \in \mathbf{R}^{(n-r) \times n},$$

$$\forall X_{22}, Y_{22} \in \mathbf{S}\mathbf{R}^{(n-r) \times (n-r)}$$

且

$$C = P \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_l) P^T,$$

$$C_j = u_j G_j u_j^T, \forall G_j \in \mathbf{S}\mathbf{R}^{(k_j - r_j) \times (k_j - r_j)}, j = 1, 2, \dots, l$$

证明 对任意 $n \times n$ 矩阵 X, Y , 令

* 收稿日期: 2001-10-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19971057); 上海高等学校科技发展基金资助项目 (00JC14057)

作者简介: 吴筑筑 (1946-), 女, 副教授.

$$\begin{aligned}U^T XU &= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \\U^T YU &= \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}, \\X_{11}, Y_{11} &\in \mathbf{R}^{r \times r}\end{aligned}\tag{6}$$

方程 (1) 等价于 $U^T XA = U^T YAD$, 即

$$\begin{aligned}X_{11} \Sigma V_1^T &= Y_{11} \Sigma V_1^T D, \\X_{21} \Sigma V_1^T &= Y_{21} \Sigma V_1^T D\end{aligned}\tag{7}$$

若 X, Y 是方程 (1) 的对称解, 则有

$$\begin{aligned}X_{21} &= Y_{21} \Sigma V_1^T D V_1 \Sigma^{-1}, \\Y_{21} \Sigma V_1^T D V_2 &= 0,\end{aligned}$$

故可得 Y_{21} 的通式。

设 $C = V_1 \Sigma Y_{11} \Sigma V_1^T$, 则 $C = C^T$, 且

$$C V_2 = 0, Y_{11} = \Sigma^{-1} V_1^T C V_1 \Sigma^{-1},$$

$$X_{11} = \Sigma^{-1} V_1^T C D V_1 \Sigma^{-1}, CD = DC$$

故有 $P^T C P \Lambda = \Lambda P^T C P$. 于是

$$P^T C P = \text{diag}(C_1, C_2, \cdots, C_l)$$

其中, C_j 是 k_j 阶对称矩阵, 由 $C V_2 = 0$ 有

$$C_j P_j^T V_2 = 0$$

故由推论 1 可得 C_j 的表达式, $j = 1, 2, \cdots, l$. 再由式 (6) 及对称性可得式 (5). 反之容易验证由式 (5) 给出的 X, Y 对称且满足方程 (1).

文 [1] 定理 4.1 (4.7) 式等价于本文式 (5) 满足 $A^T XA = D$ 时的特殊情形, 证略.

定理 2 已知 $A \in \mathbf{R}^{n \times m}, D \in \mathbf{SR}^{m \times m}$. 设 $P, P_j, k_j, j = 1, 2, \cdots, l$, 如定理 1 所示, 记 $k = [n/2], S_k = [e_k, e_{k-1}, \cdots, e_1]$, e_j 是 I_k 的第 j 列, $j = 1, 2, \cdots, k$.

$$\begin{aligned}M^T A &= \begin{pmatrix} A_1^T & A_2^T \end{pmatrix}^T, \\A_1 &\in \mathbf{R}^{(n-k) \times m}, A_2 \in \mathbf{R}^{k \times m}\end{aligned}$$

其中, M 依 n 的奇偶分别为^[3]

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_k & I_k \\ S_k & -S_k \end{pmatrix}, n = 2k; \\M &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_k & 0 & I_k \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ S_k & 0 & -S_k \end{pmatrix}, n = 2k + 1\end{aligned}$$

设 $i = 1, 2, r_i = \text{rank}(A_i), A_i$ 的 SVD 为

$$A_i = U_i \begin{pmatrix} \Sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_i^T$$

这里 Σ_i 为正定对角阵,

$$U_1 = [U_{11}, U_{12}] \in \mathbf{OR}^{(n-k) \times (n-k)},$$

$$U_2 = [U_{21}, U_{22}] \in \mathbf{OR}^{k \times k},$$

$$V_i = [V_{i1}, V_{i2}] \in \mathbf{OR}^{m \times m}$$

U_{i1} 和 V_{i1} 均为 r_i 列,

$$\mathbf{R}(u_{ij}) = N(V_{i2}^T P_j),$$

$$u_{ij}^T u_{ij} = I, j = 1, 2, \cdots, l$$

则方程 (1) 有双对称解偶 (X, Y) , 其通解为

$$\begin{aligned}X &= M \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} M^T, \\Y &= M \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} M^T\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}X_i &= (A_i^\dagger)^T C_i D A_i^\dagger + U_{i2} Y_{i21} U_{i1}^T A_i D A_i^\dagger + \\&\quad (U_{i2} Y_{i21} U_{i1}^T A_i D A_i^\dagger)^T + U_{i2} X_{i22} U_{i2}^T \\Y_i &= (A_i^\dagger)^T C_i A_i^\dagger + U_{i2} Y_{i21} U_{i1}^T + \\&\quad (U_{i2} Y_{i21} U_{i1}^T)^T + U_{i2} Y_{i22} U_{i2}^T, i = 1, 2\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}Y_{i21} &= Z_i U_{i1}^T [I - A_i D V_{i2} (A_i D V_{i2})^\dagger] U_{i1}, i = 1, 2 \\ \forall Z_1 &\in \mathbf{R}^{(n-k-r_1) \times r_1}, \forall Z_2 \in \mathbf{R}^{(k-r_2) \times r_2},\end{aligned}$$

$$C_i = P \text{diag}(C_{i1}, C_{i2}, \cdots, C_{il}) P^T, C_{ij} = u_{ij} G_{ij} u_{ij}^T$$

这里, G_{ij}, X_{i22}, Y_{i22} 为适当阶数的任意对称矩阵, $i, j = 1, 2$.

证明 双对称矩阵 X, Y 具有 (8) 的形式^[3], 式 (1) 等价于

$$X_1 A_1 = Y_1 A_1 D, X_2 A_2 = Y_2 A_2 D$$

由定理 1 可得结论.

引理 2^[1] 方程 $A^T XA = D$ 有对称解 X 的充要条件是 $D^T = D, N(A) \subseteq N(D)$.

定理 3 在定理 2 的条件下, 若 D 奇异, 则方程 (2) 有双对称解偶 (X, Y) 的充要条件是 $V_{22}^T P_j P_j^T V_{12} = 0, j = 1, 2, \cdots, l-1$ 这时通解为定理 2 的结果中将 $C_{ij}, j = 1, 2, \cdots, l-1$ 改为

$$C_{2j} = u_{2j} u_{2j}^T + u_{1j} u_{1j}^T u_{2j} W_j u_{2j}^T u_{1j} u_{1j}^T,$$

$$C_{1j} = I_{k_j} - C_{2j},$$

$$\forall W_j \in \mathbf{SR}^{(k_j-r_{2j}) \times (k_j-r_{2j})}, j = 1, 2, \cdots, l-1$$

当 D 非奇异时, 将上述结果取 $j = 1, 2, \cdots, l$ 即可.

证明 由 (8) 式可知

$$A^T XA = A_1^T X_1 A_1 + A_2^T X_2 A_2 = D$$

当且仅当 $(C_1 + C_2) D = D$, 即

$$\text{diag}(C_{11} + C_{21}, \cdots, C_{1l} + C_{2l}) \Lambda = \Lambda,$$

当 D 奇异时, 上式意味着 $C_{1j} + C_{2j} = I_{k_j}$, 即

$$u_{1j} G_{1j} u_{1j}^T = I_{k_j} - u_{2j} G_{2j} u_{2j}^T, j = 1, 2, \cdots, l-1,$$

由引理 2 知对称矩阵 G_{1j}, G_{2j} 满足上式当且仅当

$$(I - u_{2j} G_{2j} u_{2j}^T) P_{N(u_{1j}^T)} = 0$$

即

$$P_{N(u_{1j}^T)} u_{2j} G_{2j} u_{2j}^T = P_{N(u_{1j}^T)}, j = 1, \cdots, l-1 \tag{9}$$

(下转第 118 页)

“recent advances in geometric inequities”[J] . I J Ning-bo University, 1991, 4(2): 85, 87.

[2] 孔凡哲. 关于 $\sum \cos^3 \frac{A}{2}$ 及其几何不等式[J] . 渝州大学学报(自然科学版), 1995, 12(2): 33.

[3] 单墀. 几何不等式在中国[M] . 南京: 江苏教育出版社, 1996: 283.

[4] 孔凡哲. $\sum \cos^3 \frac{A}{2} < 2$ 与 Kooistra 不等式[J] . 佛山大学学报, 1996, 14(4): 24.

[5] 匡继昌. 常用不等式[M] . 长沙: 湖南教育出版社, 1993: 253.

[6] 陈计, 王振. 一个三角不等式的推广和加强[J] . 成都大学学报(自然科学版), 1998, 17(2): 1—4.

The Popularization and Proving on Milošević's Inequality

ZHENG Zeng

(Department of Mathematics, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, Guangdong, China)

Abstract: The geometrical inequality $\sum \frac{a}{b+c} \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2R} \right) \geq \frac{3}{8}$ given by D. M. Milošević is improved and strengthened. The relevant proofs are given.

Key words: Milošević's inequality; Gerretsen's inequality; Euler's inequality; geometrical inequality

(上接第 115 页)
可证明上式有对称解当且仅当

$$u_{2j} u_{2j}^T P_{N(u_{1j}^T)} = P_{N(u_{1j}^T)}$$

即 $N(u_{1j}^T) \subseteq R(u_{2j})$

这相当于 $V_{22}^T P_j P_j^T V_{12} = 0, j = 1, 2, \cdots, l-1$ 。这时式 (9) 等价于

$$P_{N(u_{1j}^T)} u_{2j} (G_{2j} - I) = 0$$

用引理 1 经推导可得 G_{2j}, C_{2j} 表达式。具体推导略。

参考文献:

[1] DAI H, LANCASTER P. Linear matrix equations from

an inverse problem of vibration theory[J] . Linear Algebra Appl, 1996, 246: 31—47.

[2] HENK Don F J. On the symmetric solution of a linear matrix equation[J] . Linear Algebra Appl, 1987, 93: 1—7.

[3] XIE D X, ZHANG L, HU X Y. The solvability conditions for the inverse problem of bisymmetric nonnegative definite matrices[J] . J Computational Math, 2000, 18 (6): 597—608.

The Bisymmetric Solutions of Matrix Equation $XA=YAD$

WU Zhu zhu¹, WANG Guo rong²

(1. Department of Computer, Shaoguan University, Shaoguan 512005, Guangdong, China;
2. College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: When D is a symmetric matrix, the general solution pairs (X, Y) and the general bisymmetric solution pairs of the equation $XA=YAD$ are presented. The necessary and sufficient conditions for the existence of the bisymmetric solution pairs of the simultaneous matrix equations $XA=YAD, A^T XA=D$ and the general forms of such solutions are derived.

Key words: matrix equation; symmetric matrix; bisymmetric matrix; generalized inverses of matrices; projection operator