

计算实特征灵敏度的代数法^{*}

杨晓伟¹, 刘祚秋², 杨立洪¹

(1. 华南理工大学应用数学系, 广东 广州 510640;

2. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘要: 对于实特征灵敏度分析问题, 给出了一种代数法求解公式, 所提出的方法既适合于单频, 也适合于重频。为说明算法的数值稳定性, 还给出了严格的数学证明。

关键词: 实特征灵敏度分析; 代数法; 数值稳定性

中图分类号: O342 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 02-0106-02

结构的设计灵敏度分析, 涉及设计变量与结构的响应之间的关系, 在系统识别、振动控制和结构优化等领域有着广泛的应用。特征灵敏度(系统的特征解关于设计参数的导数)是结构的设计灵敏度的一个重要组成部分。自1968年Fox等^[1]提出了计算实特征灵敏度的模态法以来, 实特征灵敏度分析一直是人们热衷研究的课题。目前, 在实特征灵敏度中常用的方法有: ①模态法^[1]; ②模态截断修正法^[2-4]; ③迭代模态法^[5, 6]; ④代数法^[7]。一般来说, 前3种方法均是近似解法, 要想得到足够的精度, 必须给出足够的特征对, 这有时是非常困难的。最后一种方法是精确解法, 但该法在实施过程中破坏了矩阵的对称性, 给编写程序带来了很大的不便。为了保持矩阵的对称性, 并且在计算机上易于实现, 对于实特征灵敏度计算问题, 本文提出了1种代数方法。该方法不仅适用于单频, 而且也适用于重频。为了说明算法的数值稳定性, 本文给出了严格的数学证明。

1 计算实特征灵敏度的代数法

对于具有 N 个自由度的无阻尼线性系统, 其自由振动方程为

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \quad (1)$$

其中, M 、 K 分别为半正定和正定矩阵。

相应于方程(1)的特征值问题为

$$(K - M\lambda_i)x_i = 0 \quad (2)$$

把上式用特征向量矩阵形式表示可得

$$KX_m - MX_m\Lambda_m = 0 \quad (3)$$

其正交条件为

$$X_m^T MX_m = I_m \quad (4)$$

其中, I_m 是 m 阶单位矩阵, X_m 是与 λ_m 相应的特征向量矩阵。 $\Lambda_m = \lambda_m I_m$, $X_m = (x_{i+1}, x_{i+2}, \dots,$

$x_{i+m})$ 。

对于方程(3)和(4), 当 $m \neq 1$ 时, 此时特征值为重特征值。特征值和特征向量的导数不能直接计算, 因为此时在关于质量阵正交归一的条件, 重特征值所对应的特征向量不是惟一的^[8], 而且 X_m 在某个设计参数 P_0 处一般并不连续。因此, 在求重特征解的设计导数时, 首先是利用 X_m 来寻找这样的 α 使得

$$Z = X_m \alpha$$

关于 P 连续可微, 其中 $\alpha^T \alpha = I_m$; 然后, 再计算 Z 关于设计参数 P 的导数。利用这种方法所求得的 Z 是惟一的^[8]。由

$$Z^T MZ = \alpha^T X_m^T M X_m \alpha^T \alpha = I_m \quad (6)$$

可知 Z 也是满足正交条件的重特征值 λ_m 所对应的特征向量。因为

$$KZ - MZ\Lambda_m = 0 \quad (7)$$

方程(7)关于设计参数 P 求导可得

$$(K - \lambda_m M) \frac{\partial Z}{\partial P} = MZ \frac{\partial \Lambda_m}{\partial P} - \left[\frac{\partial K}{\partial P} - \lambda_m \frac{\partial M}{\partial P} \right] Z \quad (8)$$

在方程(8)左乘 X_m^T 到方程(3)和(5)可得

$$X_m^T \left[\frac{\partial K}{\partial P} - \lambda_m \frac{\partial M}{\partial P} \right] X_m \alpha = -\alpha \frac{\partial \Lambda_m}{\partial P} \quad (9)$$

上述方程是一个关于重特征值导数 $\frac{\partial \Lambda_m}{\partial P}$ 和 α 的 m 阶子特征值问题, 一般来说, $m \leq N$ 。为讨论问题的方便, 假设方程(9)具有 m 个孤立的特征值。此时 α 可惟一确定下来。当然, Z 也可惟一确定下来。

需要说明的是, 当 $m = 1$ 时, $\alpha = 1$, 此时 $Z = x_m = x_{i+1}$ 。这对应于单频的情况。

* 收稿日期: 2001-09-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972023); 华南理工大学自然科学基金资助项目(E5121199)

作者简介: 杨晓伟(1969-), 男, 博士, 讲师; E-mail: xiaoweiaidong@163.net

方程 (6) 相对于设计参数 P 求导得

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial P} = -\frac{1}{2} \mathbf{Z}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial P} \mathbf{Z} \tag{10}$$

由方程 (8) 和 (10) 可得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M} & \mathbf{M} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial P} \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial P} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial P} \right] \mathbf{Z} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{Z}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial P} \mathbf{Z} \end{pmatrix} \tag{11}$$

这是一个关于 $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial P}$ 和 $\frac{\partial \lambda_m}{\partial P}$ 的线性代数方程组，原来矩阵的对称性均被保留下来。如果系数矩阵满秩的话，那么该算法在数值上是稳定的。下面给出其严格的数学证明。

2 算法的稳定性

设
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M} & \mathbf{M} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{M} & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \tag{13}$$

其中, $\Psi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-m}, \mathbf{Z}_{i+1}, \mathbf{Z}_{i+2}, \dots, \mathbf{Z}_{i+m})$, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-m}$ 是相互独立的且与 $\mathbf{Z}_{i+1}, \mathbf{Z}_{i+2}, \dots, \mathbf{Z}_{i+m}$ 线性无关, 则矩阵 Φ 的所有列是线性无关的, 从而 Φ 是满秩矩阵。现证明 $\mathbf{D}$ 满秩。

由方程 (12) 和 (13) 可得

$$\Phi^T \mathbf{D} \Phi = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M} & \mathbf{M} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^T (\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \Psi & \Psi^T \mathbf{M} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{M} \Psi & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

由方程 (13) 和 (14) 可得

$$\Psi^T (\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\Psi^T \mathbf{M} \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{M} \Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{I}_m \end{pmatrix}^T \tag{17}$$

因此
$$\Phi^T \mathbf{D} \Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & \mathbf{B} \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_m \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{I}_m & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

由方程 (18) 可得

$$|\det(\Phi^T \mathbf{D} \Phi)| = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \circ \det(\mathbf{I}_m) \right| = |\det(\mathbf{A})| \tag{19}$$

由方程 (15) 可知, 因为 $\Psi^T (\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \Psi$ 的阶数是 n , 秩是 $n - m$, 所以 $\mathbf{A}$ 的秩必须是 $n - m$ 。从而 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

由方程 (19) 可知,

$$\det(\Phi^T \mathbf{D} \Phi) \neq 0$$

因为 Φ 是满秩矩阵, 所以

$$\det(\mathbf{D}) \neq 0$$

即 $\mathbf{D}$ 是满秩矩阵。

参考文献:

[1] FOX R L, KAPOOR M D. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors [J]. J AIAA, 1968, 6(12): 2426—2429.
[2] WANG B P. Improved approximate for computing of eigenvector derivative in structural dynamics [J]. J AIAA, 1991, 29(6): 1018—1020.
[3] YU M, LIN Z S, WANG D J. Comparison of several model methods for computing mode shape derivatives [J]. Computers and Structures, 1996, 62(2): 381—393.
[4] 陈塑寰. 结构动态设计的矩阵摄动理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 193—217.
[5] ZHANG O Q, ZERVA A. Iterative method for calculating derivatives of eigenvectors [J]. J AIAA, 1996, 34(5): 1088.
[6] 宋海平, 周传荣. 结构特征向量灵敏度分析的共轭梯度迭代法 [J]. 计算力学学报, 2000, 17(3): 365—368.
[7] LIU J K. Perturbation technique for non-self-adjoint systems with repeated eigenvalues [J]. J AIAA, 1999, 37(2): 222.
[8] 王文亮, 张慧生. 离散振动系的特征灵敏度分析 [J]. 振动与冲击, 1997, 16(2): 82—88.

Algebraic Method for Computing Sensitivities of Real Eigenproblems

YANG Xiao wei¹, LIU Zuo qiu², YANG Li hong¹

(1. Department of Applied Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China;
2. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: An algebraic method for sensitivity analysis of real eigenproblems is presented. In the view of theoretical analysis, the method can be applied to the repeated frequencies as well as to the distinct ones. In order to illustrate that the proposed method is stable in numerical computations, a proof is also given.

Key words: sensitivity analysis of real eigenproblems; algebraic method; numerical stability